

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

А. Н. Литвинов

Техническая механика

Учебное пособие

Пенза
Издательство ПГУ
2023

УДК 539.3/6(075)
ББК 30.121
Л64

Р е ц е н з е н т ы :

кандидат технических наук, доцент, проректор по учебной работе
Пензенского государственного технологического университета

О. А. Голышевский;

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой
«Сварочное, литейное производство и материаловедение»

Пензенского государственного университета

А. Е. Розен

Литвинов, Александр Николаевич.

Л64 Техническая механика : учеб. пособие / А. Н. Литвинов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2023. – 218 с.

ISBN 978-5-907752-02-3

Изложены основы технической механики. Во всех разделах приведены решения для типовых элементов конструкций с рекомендациями методического характера. Даны контрольные задания, необходимые для выполнения курсовых и контрольных работ в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов.

Издание подготовлено на кафедре «Техническая и прикладная механика и графика» ПГУ и предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 15.03.01 «Машиностроение», 15.03.02 «Технологические машины и оборудование», 23.03.01 «Технология транспортных процессов», а также по специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» всех форм обучения, может быть полезно магистрантам и аспирантам, обучающимся по указанным направлениям и специальностям, инженерно-техническим работникам, занимающимся вопросами прочности элементов конструкций машино- и приборостроения.

**УДК 539.3/6(075)
ББК 30.121**

ISBN 978-5-907752-02-3

© Пензенский государственный
университет, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	6
Введение.....	7
1. Основные понятия.....	8
1.1. Объекты исследования	8
1.2. Внешние нагрузки.....	9
1.3. Внутренние силовые факторы. Метод сечений.....	9
1.4. Основные гипотезы.....	11
2. Растяжение и сжатие.....	14
2.1. Основные соотношения.....	14
2.2. Экспериментальные методы определения основных физико-механических свойств материалов.....	16
2.3. Основные характеристики материала.....	18
2.4. Условия прочности. Основные типы расчетов на прочность	20
2.5. Условие жесткости	22
2.6. Примеры расчетов на прочность.....	22
2.7. Особенности работы статически неопределимых систем.....	30
2.8. Полный расчет на прочность статически неопределимого стержня.....	31
3. Геометрические характеристики плоских сечений	41
3.1. Основные соотношения.....	41
3.2. Пример расчета геометрических характеристик поперечного сечения	44
4. Кручение валов.....	48
4.1. Основные соотношения.....	48
4.2. Расчет на прочность и жесткость трансмиссионного вала.....	50
4.3. Расчет на прочность статически неопределимого вала	53
4.4. Особенности расчета валов некруглого поперечного сечения	53
5. Изгиб прямых стержней	56
5.1. Основные соотношения.....	56
5.2. Расчет на прочность.....	58
5.3. Определение перемещений.....	60
5.4. Рекомендации по проектированию балок, работающих на изгиб.....	62
5.5. Пример расчета стальной балки на прочность	64
5.6. Расчет балки на жесткость	70
5.7. Расчет на прочность балки из хрупкого материала	74
5.8. Расчет на прочность статически неопределимых балок.....	82
6. Сложное сопротивление	84
6.1. Основные понятия	84
6.2. Пространственный изгиб	84
6.3. Косой изгиб	87

6.4. Изгиб с растяжением и сжатием.....	88
6.5. Расчет цилиндрических винтовых пружин	92
7. Основы напряженно-деформированного состояния	98
7.1. Анализ напряженного состояния.....	98
7.2. Обобщенный закон Гука	101
7.3. Критерии прочности	102
7.4. Расчет на прочность при изгибе с кручением валов круглого поперечного сечения	106
7.5. Экспериментальные методы исследования напряженно- деформированного состояния элементов конструкций	113
7.6. Примеры исследования напряженно-деформированного состояния.....	118
7.7. Контактные напряжения.....	126
8. Динамическое действие нагрузок.....	137
8.1. Основные понятия.....	137
8.2. Расчет коэффициента динамичности	138
8.3. Расчет на ударную нагрузку	144
8.4. Расчет упругой системы при действии вибрации.....	147
8.5. Защита систем от динамических воздействий	150
9. Устойчивость сжатых стержней	157
9.1. Основные понятия.....	157
9.2. Расчетные формулы	158
9.3. Особенности расчета на устойчивость	161
9.4. Пример расчета на устойчивость.....	162
9.5. Практический расчет на устойчивость	165
9.6. Проектный расчет на устойчивость	165
10. Задания для выполнения курсовых работ.....	170
10.1. Общие указания.....	170
10.2. Расчет статически определимого стержня	172
10.3. Расчет статически неопределимого стержня	174
10.4. Расчет геометрических характеристик поперечного сечения.....	177
10.5. Расчет на кручение трансмиссионного вала	179
10.6. Расчет стальной балки на прочность	181
10.7. Расчет чугунной балки на прочность.....	184
10.8. Расчет на прочность при пространственном изгибе	185
10.9. Расчет трансмиссионного вала при сложном напряженном состоянии	187
10.10. Расчет на устойчивость	189
10.11. Расчет на ударную нагрузку	191
10.12. Расчет упругой системы при действии вибрации.....	193
Заключение.....	196
Список литературы.....	198

Приложение 1	199
Приложение 2	203
Приложение 3	208
Приложение 4	213
Приложение 5	214
Приложение 6	215
Приложение 7	216
Приложение 8	217

Предисловие

Вопросы проектирования новых изделий и проверки прочности существующих конструкций в сложных условиях эксплуатации связаны с исследованием напряженно-деформированного состояния элементов этих конструкций при различных видах внешних воздействий. Исследование напряженно-деформированного состояния элементов конструкций включает их расчеты на прочность, жесткость, устойчивость при статических и динамических воздействиях. Анализ напряженно-деформированного состояния элементов позволяет на этапе проектирования оптимизировать конструкции изделий машино- и приборостроения для обеспечения их надежности в сложных условиях эксплуатации.

Указанные вопросы рассматриваются в курсе «Техническая механика» для различных направлений подготовки бакалавров, специалистов и магистрантов. Содержание пособия построено на материалах лекций, практических и лабораторных занятий, которые проводились на кафедре «Теоретическая и прикладная механика и графика» для различных направлений и специальностей машиностроительного, транспортного и приборостроительного профилей.

Все разделы курса, изложенные в пособии, содержат основные расчетные формулы и их анализ. Приведены рекомендации по оптимальному проектированию типовых элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при различных видах нагружения. Сформулированы задания на выполнение курсовых и контрольных работ. В конце каждого раздела приведены контрольные вопросы для самопроверки и подготовки студентов к итоговой аттестации.

В приложениях приведены справочные данные, необходимые для выполнения практических расчетов.

С пособием можно ознакомиться в библиотеке и читальном зале ПГУ.

Электронная версия пособия находится на сайте кафедры ТПМиГ ПГУ.

Введение

Как известно, теоретическая механика имеет дело с материальной точкой или абсолютно твердым телом. Для тех явлений, когда деформациями элемента конструкции можно пренебречь, выводы теоретической механики оказываются вполне достаточными. Для построения механики реальных элементов конструкций одних законов теоретической механики оказывается недостаточно и их необходимо дополнить физическими законами и гипотезами, которые характеризуют деформации и напряженно-деформированное состояние (НДС) элементов конструкций под действием реальных внешних эксплуатационных и технологических воздействий (силовых, температурных, монтажных и др.).

Раздел механики, в котором рассматривается поведение реальных деформируемых элементов конструкций с учетом их физико-механических свойств, называется технической механикой. Практической целью этого раздела является расчет типовых элементов реальных конструкций различного назначения на прочность, жесткость и устойчивость.

В соответствии с ФГОС ВО процесс изучения дисциплины направлен на формирование компетенций, связанных с развитием способностей студентов к разработке технических заданий и конструированию отдельных узлов и элементов машин и приборов различного назначения.

1. Основные понятия

1.1. Объекты исследования

Объектами изучения являются типовые элементы конструкций различного назначения, изготовленные из реальных конструкционных материалов, свойства которых характеризуются их физико-механическими характеристиками, которые определяются экспериментально.

В зависимости от геометрической формы и размеров конструктивные элементы классифицируются следующим образом (рис. 1.1): *стержень (брус)*, *оболочка*, *пластина*, *тело*.

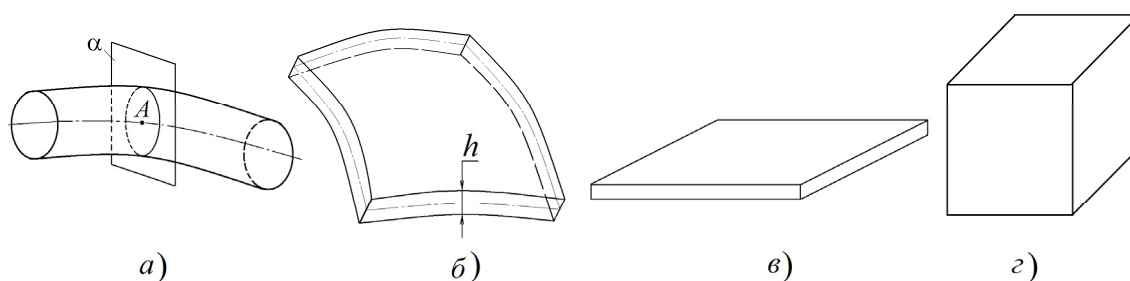


Рис. 1.1. Виды конструктивных элементов:
а – стержень (брус); б – оболочка; в – пластина; г – тело

Стержень – элемент конструкции, у которого одно измерение (длина) значительно больше двух других (рис. 1.1,а). *Поперечным сечением стержня*, проходящим через точку *A* (рис. 1.1,а), называется сечение стержня плоскостью α , содержащей эту точку и нормальной к его оси. В зависимости от геометрической формы оси стержни делятся на прямой, криволинейный, кольцевой и т.п.

Стержни могут иметь постоянное или переменное сечение.

Оболочка – элемент конструкции, у которого одно измерение (толщина h) значительно меньше двух других (рис. 1.1,б). Поверхность, равноудаленная от внутренней и наружной поверхностей оболочки, называется срединной поверхностью. В зависимости от геометрии срединной поверхности оболочки делятся на цилиндрическую, коническую, сферическую и т.п.

Пластина – частный случай оболочки, у которой срединная поверхность является плоскостью (рис. 1.1,в). По виду срединной плоскости пластины делятся на прямоугольную, треугольную, круглую, кольцевую и т.п.

Оболочки и пластины могут иметь постоянную или переменную толщину.

Массив – элемент, у которого все три размера имеют один порядок (рис. 1.1,з).

1.2. Внешние нагрузки

Совокупность действующих на элемент конструкции сил, моментов, тепловых и иных воздействий будем называть внешними нагрузками. По отношению к исследуемому объекту нагрузки являются внешними силами. В число внешних сил включаются также реакции связей, наложенных на конструкции. Напомним, что в зависимости от площади контактной площадки, через которую на элемент передается внешняя сила, различают сосредоточенные и распределенные нагрузки [1].

По длительности воздействия и характеру приложения внешние нагрузки делятся на *статические* и *динамические*.

Статической называют нагрузку, которая медленно возрастает от нуля до номинального значения, которое остается неизменным в процессе эксплуатации конструкции.

Динамическая нагрузка характеризуется изменением ее величины или направления в процессе эксплуатации. Чаще всего динамические нагрузки являются вибрационными, ударными.

1.3. Внутренние силовые факторы. Метод сечений

Под действием внешних нагрузок в поперечных сечениях элемента конструкции в самом общем случае возникают шесть внутренних силовых факторов, которые определяют методом сечений.

Суть метода сечений состоит в следующем:

Элемент конструкции мысленно рассекаем на две части и рассматриваем равновесие любой отсеченной части, находящейся под действием внешних нагрузок и внутренних силовых факторов, приложенных к этой части.

На рис. 1.2 представлены внутренние силовые факторы и метод сечений.

В произвольном поперечном сечении элемента конструкции, на который действуют внешние нагрузки P_j (рис. 1.2,а), в самом общем случае возникают следующие внутренние силовые факторы (рис. 1.2,б): N – продольная сила; Q_x , Q_y – поперечные (перерезы-

вающие) силы; $M_z = M_{кр}$ – крутящий момент; M_x , M_y – изгибающие моменты.

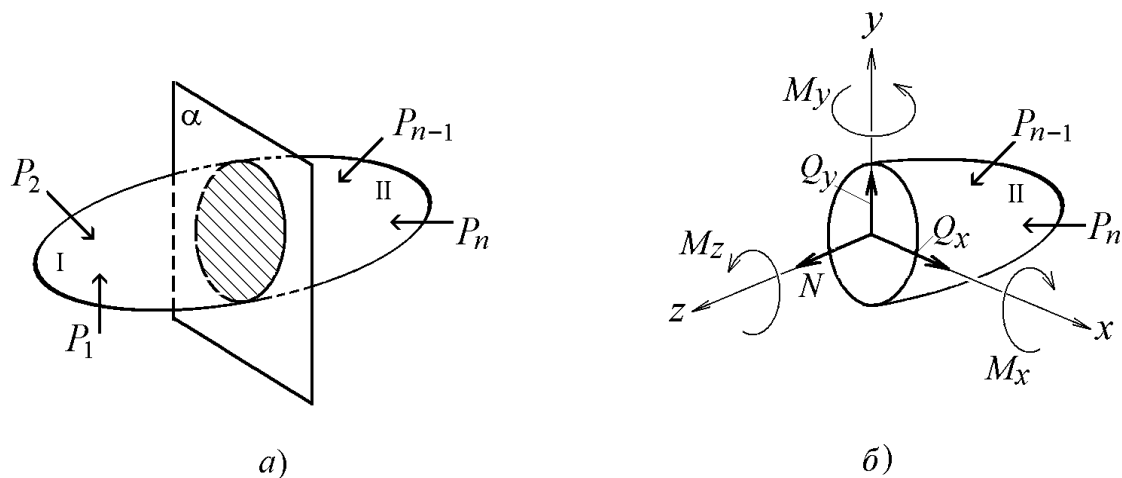


Рис. 1.2. Произвольное поперечное сечение конструкции:
а – действие внешних нагрузок; б – внутренние силовые факторы

В соответствии с методом сечений для отсеченной части II элемента конструкции (рис. 1.2,б) следует составить шесть уравнений равновесия:

- сумма проекций всех сил X_j на ось x : $\sum X_j + Q_x = 0$;
- сумма проекций всех сил Y_j на ось y : $\sum Y_j + Q_y = 0$;
- сумма проекций всех сил Z_j на ось z : $\sum Z_j + N = 0$;
- сумма моментов относительно оси x : $\sum \text{mom}_x(P_j) + M_x = 0$;
- сумма моментов относительно оси y : $\sum \text{mom}_y(P_j) + M_y = 0$;
- сумма моментов относительно оси z : $\sum \text{mom}_z(P_j) + M_{кр} = 0$.

Существенной особенностью представленной системы уравнений равновесия для отсеченной части является то, что каждое уравнение содержит лишь один внутренний силовой фактор, т.е. система уравнений равновесия и внутренние силовые факторы определяются достаточно просто. Результат определения внутренних силовых факторов не зависит от того, какая часть элемента конструкции (I или II) рассматривается. Для упрощения расчетов рекомендуется рассматривать отсеченную часть элемента конструкции, на которую действует минимальное число внешних нагрузок.

П р и м е ч а н и е. При составлении уравнений равновесия используют правило знаков для внешних нагрузок и внутренних силовых факторов, которые вводятся для различных видов нагружения (растяжение и сжатие, кручение, изгиб), рассмотренных в соответствующих разделах пособия.

1.4. Основные гипотезы

Для вывода уравнений и соотношений для расчета типовых элементов конструкций принимают основные гипотезы о структуре и свойствах материалов, а также о характере деформаций этих элементов:

1. *Гипотеза о сплошности материала.* Считается, что материал элемента конструкции является сплошным, т.е. не допускается наличие раковин, пор, трещин и иных дефектов. Материал полностью занимает объем элемента.

2. *Гипотеза об однородности и изотропности.* Считается, что свойства материала одинаковы во всех точках элемента. В каждой точке по всем направлениям свойства также одинаковы. В тех случаях, когда свойства материала отличаются по разным направлениям, материал называется анизотропными (стеклопластики; материалы, армированные различными волокнами и т.п.).

3. *Гипотеза о малости деформаций.* Считается, что деформации элемента конструкции малы по сравнению с его линейными размерами.

4. *Гипотеза об упругости материала.* Все элементы конструкции считаются линейно упругими, а при их деформации выполняется закон Гука. Таким образом, считается, что между нагрузками и деформациями элемента конструкции имеет место линейная зависимость.

5. *Гипотеза плоских сечений.* Считается, что плоские поперечные сечения, перпендикулярные к оси элемента конструкции, в процессе его деформирования остаются плоскими и перпендикулярным к его деформированной оси.

Эти, а также некоторые специальные гипотезы, которые принимаются для различных видов нагружения, позволяют решать широкий круг задач технической механики по расчету на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций. Результаты таких теоретических расчетов обычно хорошо согласуются с данными экспериментальных исследований при различных видах нагружения конструкций.

На основании принятых основных гипотез сформулирован *принцип суперпозиций* (принцип независимости действия сил или принцип сложения), который формулируется следующим образом.

Принцип суперпозиций. Результат воздействия на элемент конструкции системы внешних нагрузок равен алгебраической сумме результатов воздействия каждой из нагрузок, приложенных

к этому элементу по отдельности, и не зависит от последовательности приложения этих нагрузок.

Например, если на элемент конструкции одновременно действует внешняя нагрузка и тепловое воздействие, то задачу по определению усилий и деформаций, возникающих в конструкции, можно разделить на две задачи:

- 1) рассмотреть действие только силовых нагрузок без учета температурного воздействия;
- 2) рассмотреть только тепловое воздействие.

Используя принцип суперпозиций, определить результирующие усилия и деформации путем алгебраического (с учетом знака) сложения результатов расчета в первой и второй задачах.

Принцип суперпозиций имеет широкое практическое применение в расчетной практике для различных элементов конструкций при сложных видах их нагружения, так как позволяет сложную расчетную схему разбить на ряд простейших задач, решения для которых достаточно просто получить, или можно использовать известные решения, приведенные в справочной литературе.

П р и м е ч а н и е. Следует иметь в виду, что принцип суперпозиций основан на выполнении всех основных гипотез, поэтому если хотя бы одна из принятых гипотез (например, гипотеза малости деформаций или гипотеза об упругости материала) не выполняется, то принцип суперпозиций неприменим.

Контрольные вопросы

1. Что изучают в курсе технической механики?
2. Дайте классификацию основных объектов исследования.
3. Какой элемент конструкции называют стержнем?
4. Какой элемент конструкции называют оболочкой, пластиной?
5. Дайте понятие внешней нагрузки, действующей на элемент конструкции.
6. Какую нагрузку называют статической?
7. Какую нагрузку называют динамической?
8. Какие внутренние силовые факторы возникают в общем случае нагружения элемента конструкции?
9. Сформулируйте суть метода сечений.
10. Перечислите основные гипотезы.
11. Сформулируйте гипотезу сплошности, однородности и изотропности материала.

12. Сформулируйте гипотезу о малости деформаций.
13. Сформулируйте гипотезу об упругости материала.
14. Сформулируйте гипотезу плоских сечений.
15. Сформулируйте принцип суперпозиций и условия его применимости.
16. Приведите примеры применения принципа суперпозиций.
17. В каких случаях принцип суперпозиций не применим?

2. Растяжение и сжатие

2.1. Основные соотношения

При растяжении (сжатии) прямых стержней в их поперечных сечениях возникают продольные усилия N , для определения которых применяется метод сечений [1–3] на каждом участке стержня.

Эпюрой продольных сил называют графическое изображение изменения продольной силы N по длине стержня. При построении эпюры применяются следующие правила знаков: *продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение, и отрицательной, если она вызывает сжатие.*

Под действием продольных сил в точках поперечного сечения возникают нормальные напряжения σ , величина которых определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (2.1)$$

где F – площадь поперечного сечения стержня. Знаки σ и N совпадают.

Рассмотрим растяжение участка стержня длиной l продольным усилием N (рис. 2.1).

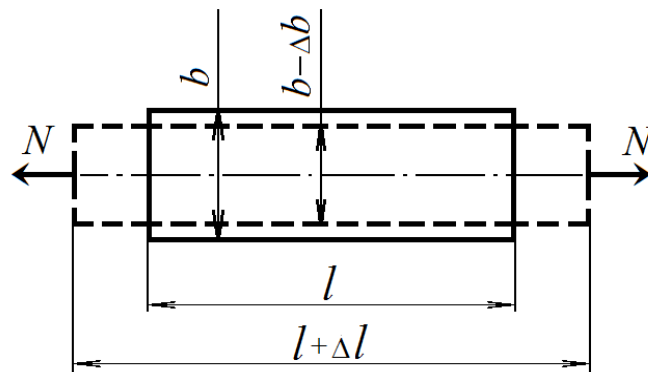


Рис. 2.1. Участок стержня

Здесь Δl и Δb – продольное удлинение и поперечное сужение соответственно; l и b – длина и поперечный размер стержня.

Относительной продольной деформацией называется безразмерная величина

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.2)$$

Относительной поперечной деформацией называется безразмерная величина

$$\epsilon' = \frac{\Delta b}{b}. \quad (2.3)$$

Для линейно упругих материалов выполняется закон Р. Гука, устанавливающий связь между напряжениями и деформациями в виде

$$\sigma = E\epsilon, \quad (2.4)$$

где E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга), который для каждого материала определяется экспериментально и приводится в ГОСТах.

Коэффициентом Пуассона называется безразмерный параметр, который определяется выражением

$$\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|, \quad (2.5)$$

определяется экспериментально для каждого материала, характеризует его поперечную жесткость и приводится в ГОСТах. Для всех материалов, существующих в природе, коэффициент Пуассона изменяется в пределах $0 \leq \mu \leq 0,5$.

В прил. 1 приведены значения E и μ для большого числа различных материалов. Методика экспериментального определения этих характеристик изложена в [4, 5].

При растяжении (сжатии) стержней происходит их удлинение (укорочение). Продольное перемещение Δl на участке стержня в соответствии с законом Гука определяется соотношением

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}, \quad (2.6)$$

где l – длина участка; E – модуль упругости первого рода.

Если стержень имеет несколько участков, то формула (2.6) обобщается и принимает вид

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{(EF)_i}. \quad (2.7)$$

Здесь $i = 1, 2, 3, \dots, n$ – номер участка; n – число участков; l_i – длина i -го участка; $(EF)_i$ – жесткость на растяжение i -го участка; N_i – продольная сила на i -м участке, которая определяется по эпюре продольных сил. Продольные силы в (2.6) и (2.7) подставляются с учетом их знаков.

2.2. Экспериментальные методы определения основных физико-механических свойств материалов

При расчете деталей машин и приборов необходимо знать механические свойства материалов, характеризующих их прочность и пластичность.

К характеристикам прочности относятся предел пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$, предел текучести $\sigma_{\text{т}}$ и предел прочности (временное сопротивление) $\sigma_{\text{в}}$. Предел прочности и предел текучести необходимы для назначения допускаемых напряжений, входящих в условия прочности.

К характеристикам пластичности относятся относительное остаточное удлинение после разрыва δ и относительное остаточное сужение после разрыва ψ . Они необходимы для условного деления материалов на хрупкие и пластичные [1, 2].

Все перечисленные механические характеристики определяются при испытании образцов материала на статическое растяжение. Это испытание является наиболее распространенным методом исследования и контроля механических свойств материалов. Испытание образцов производится на разрывных машинах с соблюдением всех требований, указанных в соответствующих стандартах.

По ГОСТ 1497–84 испытание металлов на растяжение производится на стандартных образцах круглого или прямоугольного поперечного сечения; по ГОСТ 10446–80 – на образцах из проволоки. Большинство испытательных машин производят косвенное измерение нагрузки и удлинения образца.

Диаграммное устройство испытательной машины автоматически записывает зависимость между действующей растягивающей нагрузкой P и абсолютной продольной деформацией образца Δl вплоть до его разрушения. На рис. 2.2 показана типичная диаграмма растяжения для образца из малоуглеродистой стали.

Начальный криволинейный участок диаграммы (1–2) является результатом устранения зазоров в захватах. Этот участок не отражает свойств материала, и его исключают при обработке диаграммы, принимая за начало координат точку 0 (точку пересечения продолжения прямолинейного участка диаграммы с осью абсцисс). Ось абсцисс (Δl) проводится от точки 1 начала диаграммы, поэтому для определения механических характеристик материала рассматривается диаграмма $OABCKDE$.

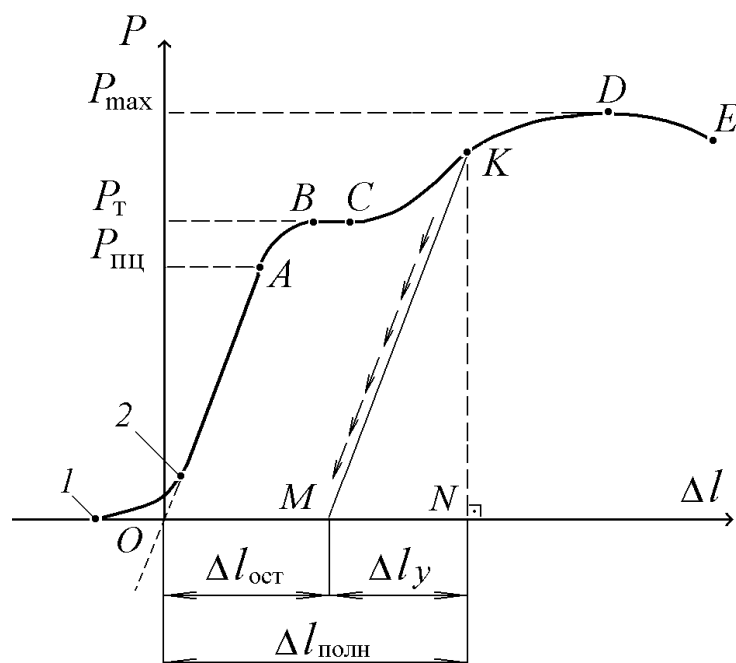


Рис. 2.2. Диаграмма растяжения для образца из малоуглеродистой стали

На прямолинейном участке диаграммы OA материал подчиняется закону Гука [1].

Точке A соответствует наибольшая нагрузка $P_{пл}$, при которой сохраняется пропорциональная зависимость между P и Δl . Нагрузка $P_{пл}$ соответствует пределу пропорциональности $\sigma_{пл}$.

За точкой A нарушается пропорциональность между P и Δl , и в образце после разгрузки появляются остаточные деформации.

Начиная с точки B , абсолютное удлинение образца возрастает практически без увеличения нагрузки, материал образца «течет». Горизонтальный участок BC называется площадкой текучести, а нагрузка P_T соответствует физическому пределу текучести σ_T .

За точкой C образец опять восстанавливает способность сопротивляться возрастанию нагрузки.

Участок диаграммы CKD , представляющий собой плавную кривую с небольшим подъемом, называют зоной упрочнения. При нагрузке, соответствующей точке D , в образце образуется местное сужение, так называемая «шейка» (как правило, в средней части образца). При этом нагрузка, действующая на образец, достигает максимальной величины $P_{max} = P_B$, соответствующей пределу прочности (временному сопротивлению) материала образца σ_B . Участок DE представляет собой ниспадающую кривую. Он харак-

терен уменьшением нагрузки P вследствие прогрессивно развивающейся шейки и уменьшению площади поперечного сечения образца. В точке E происходит разрушение образца по шейке.

Если нагрузить образец силой, превышающей предел пропорциональности ($P_{\text{пц}}$), например до точки K , затем снять нагрузку, то график разгрузки будет представлять собой прямую KM , параллельную участку OA диаграммы. Из этого следует, что при разгрузке зависимость между силой и деформацией подчиняется закону Гука.

Величина OM – остаточная деформация $\Delta l_{\text{ост}}$; MN – упругая деформация Δl_y ; ON – полная деформация $\Delta l_{\text{полн}}$ образца

$$\Delta l_{\text{полн}} = \Delta l_{\text{ост}} + \Delta l_y.$$

Аналогично можно найти все виды деформаций для любой точки диаграммы. При повторном нагружении образца (из точки M) диаграмма сначала пойдет по прямой линии MK , а затем по кривой KDE .

2.3. Основные характеристики материала

Характеристики прочности. Исходными данными для определения механических характеристик прочности является диаграмма растяжения, полученная в процессе испытания (рис. 2.2).

Предел пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$ – наибольшее напряжение, при котором еще выполняется закон Гука (сохраняется пропорциональная зависимость между деформациями и напряжениями):

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{P_{\text{пц}}}{F_0}, \quad (2.8)$$

где F_0 – площадь поперечного сечения до испытаний образца.

Физический предел текучести σ_T – напряжение, при котором образец деформируется без увеличения нагрузки (участок BC):

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F_0}. \quad (2.9)$$

Многие материалы не имеют явно выраженной площадки текучести, поэтому для них определяют условный предел текучести.

Условный предел текучести $\sigma_{0,2}$ – это напряжение, при котором остаточное относительное удлинение составляет 0,2 % от l_0 , т.е. $\Delta l_{\text{ост}} = \Delta l_{0,2}$:

$$\sigma_{0,2} = \frac{P_{0,2}}{F_0}. \quad (2.10)$$

Для определения усилия $P_{0,2}$ ГОСТ 1497–84 допускает использовать диаграмму растяжения, вычерченную испытательной машиной по методике, изложенной в [4].

Значения основных характеристик для некоторых материалов приведены в прил. 1.

Диаграмму растяжения образца (см. рис. 2.2) можно построить в осях σ – ϵ , используя формулы (2.1) и (2.2), полагая $F = F_0$. В этом случае диаграмма имеет вид, аналогичный виду, представленному на рис. 2.2. Так как при определении основных характеристик в формулах (2.8)–(2.10) использовалось начальное значение площади поперечного сечения F_0 , то эта диаграмма называется условной (рис. 2.3).

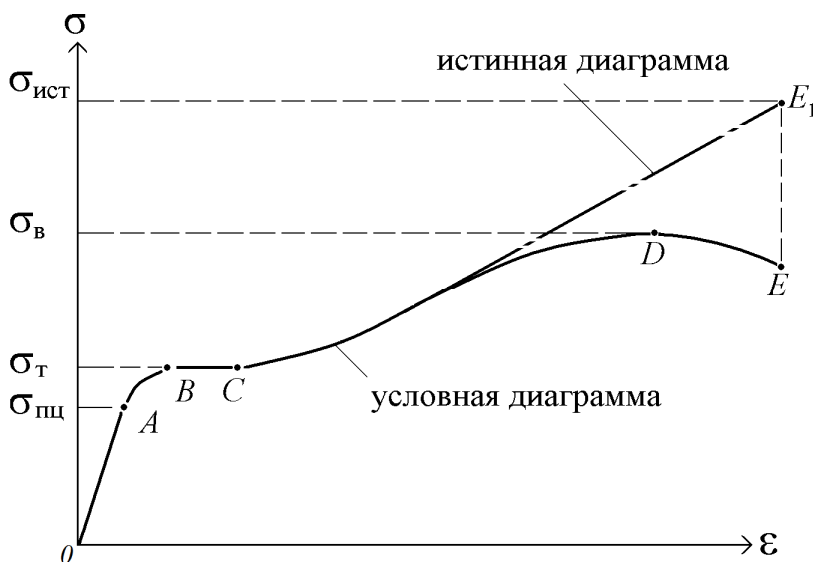


Рис. 2.3. Диаграмма растяжения образца

Так как при растяжении образца его фактическая площадь сечения уменьшается, а на участке DE образуется шейка, если в формулах (2.8)–(2.10) использовать фактическое значение площади поперечного сечения F , получим истинную диаграмму растяжения, которая на рис. 2.3 показана пунктирной линией.

В этом случае истинный предел прочности определяется выражением $\sigma_{\text{ист}} = \frac{\max P}{F_k}$. При этом получим, что $\sigma_{\text{ист}} \geq \sigma_{\text{в}}$.

В ГОСТах приводится значение условного предела прочности $\sigma_{\text{в}}$.

Предел прочности (временное сопротивление) σ_b – напряжение, равное частному от деления максимальной нагрузки, которую выдерживает образец, на первоначальную площадь поперечного сечения образца:

$$\sigma_b = \frac{\max P}{F_0}. \quad (2.11)$$

Характеристики пластичности. Характеристики пластичности материала δ и ψ определяются путем сравнения размеров образца до и после испытания.

Относительное остаточное удлинение образца после разрыва δ равно отношению приращения расчетной длины образца после разрушения к ее исходной величине

$$\delta = \frac{\Delta l_{\text{ост}}}{l_0} 100 \% = \frac{l_k - l_0}{l_0} 100 \%, \quad (2.12)$$

где $\Delta l_{\text{ост}}$ – приращение расчетной длины образца; l_k – длина образца после разрыва.

Относительное остаточное сужение образца после разрыва ψ есть отношение уменьшения площади поперечного сечения образца в месте разрыва к начальной площади поперечного сечения образца

$$\psi = \frac{F_0 - F_k}{F_0} 100 \% , \quad (2.13)$$

где F_k – конечная минимальная площадь поперечного сечения образца в месте разрыва (в месте образования шейки).

Значения характеристик δ и ψ также приводят в ГОСТах (прил. 1).

2.4. Условия прочности.

Основные типы расчетов на прочность

Для обеспечения прочности элемента конструкции, изготовленного из пластичного материала и работающего на растяжение (сжатие), должно выполняться условие прочности

$$\max \sigma \leq [\sigma]. \quad (2.14)$$

Здесь $\max \sigma$ – максимальные напряжения в элементе конструкции; $[\sigma]$ – допускаемые напряжения для этого элемента конструкции, которые для пластичных материалов записываются в виде

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad (2.15)$$

где σ_T – предел текучести для материала конструкции; n_T – коэффициент запаса по текучести, величина которого зависит от условий эксплуатации и ответственности конструкции. Для обычных машино- и приборостроительных конструкций, если не оговорено особо, коэффициент запаса прочности принимается равным $n_T \geq 1,5$.

Если материал конструкции является хрупким, то записывают два условия прочности (на сжатие и на растяжение):

$$\max \sigma_{сж} \leq [\sigma_{сж}]; \quad \max \sigma_p \leq [\sigma_p], \quad (2.16)$$

где $\max \sigma_{сж}$ и $\max \sigma_p$ – это максимальные растягивающие и сжимающие напряжения соответственно.

Допускаемые напряжения на сжатие $[\sigma_{сж}]$ и растяжение $[\sigma_p]$ определяются соотношениями

$$[\sigma_{сж}] = \frac{\sigma_B^{сж}}{n_B}; \quad [\sigma_p] = \frac{\sigma_B^p}{n_B}. \quad (2.17)$$

Здесь $\sigma_B^{сж}$, σ_B^p – предел прочности материала конструкции на сжатие и растяжение соответственно, а $n_B \geq 2$ – коэффициент запаса прочности.

Следует иметь в виду, что для хрупких материалов $\sigma_B^{сж} > \sigma_B^p$ и $[\sigma_{сж}] > [\sigma_p]$.

Различают три основных типа расчетов на прочность:

– *проверочный расчет*, в котором для существующей конструкции проверяется выполнение условий прочности (2.14) или (2.16);

– *проектный расчет*, в котором из условий прочности (а если это необходимо, то и из условий жесткости) определяются требуемые размеры поперечного сечения элемента конструкции;

– *расчет допускаемой внешней нагрузки*, в котором для спроектированного элемента конструкции из условий прочности (и если это необходимо из условий жесткости) определяют величину допускаемой внешней нагрузки, действующей на элемент конструкции.

2.5. Условие жесткости

В некоторых случаях для элементов конструкций кроме условий прочности требуется обеспечить выполнение условия жесткости, которое записывается в виде

$$\max \Delta \leq [\Delta], \quad (2.18)$$

где $\max \Delta$ – максимальное перемещение конкретного сечения стержня. Допускаемое перемещение для элемента конструкции $[\Delta]$ задается конструктивно из конкретных условий эксплуатации элемента конструкции и ограничивает максимально допустимые перемещения его сечений при эксплуатации. Условие (2.18) существенно ограничивает жесткость элемента конструкций.

Первым выполняется расчет на прочность, а затем выполняется проверочный расчет на жесткость. Если условие жесткости не выполняется, то принимаются конструктивные меры по обеспечению требуемой жесткости за счет увеличения площади поперечного сечения, изменения длин участков, введения дополнительных опор и т.п.

2.6. Примеры расчетов на прочность

2.6.1. Расчет статически определимого стержня

Ступенчатый стержень (рис. 2.4), участки которого имеют площади поперечных сечений F_i , нагружен продольными силами P_i . Участки стержня имеют сплошные круглые поперечные сечения диаметром D_i , длины участков равны l_i .

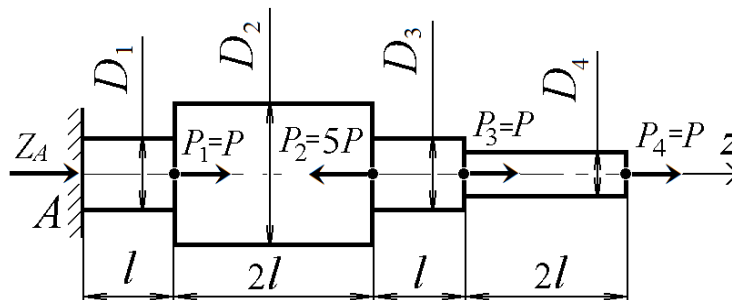


Рис. 2.4. Ступенчатый стержень

Требуется построить эпюры нормальных усилий N и нормальных напряжений σ , вычислить полное удлинение стержня и сделать вывод о прочности стержня.

Материал стержня – сталь с модулем упругости первого рода $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и допускаемым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа. Для получения численного результата принять значения:

$$P_1 = P_3 = P_4 = P; P_2 = 5P, P = 10 \text{ кН};$$

$$D_1 = D_3 = 2D; D_2 = 3D; D_4 = 1,2D; D = 8 \text{ мм}.$$

$$l_2 = l_4 = 2l; l_1 = l_3 = l; l = 50 \text{ мм}.$$

Расчетная схема представлена на рис. 2.5,а.

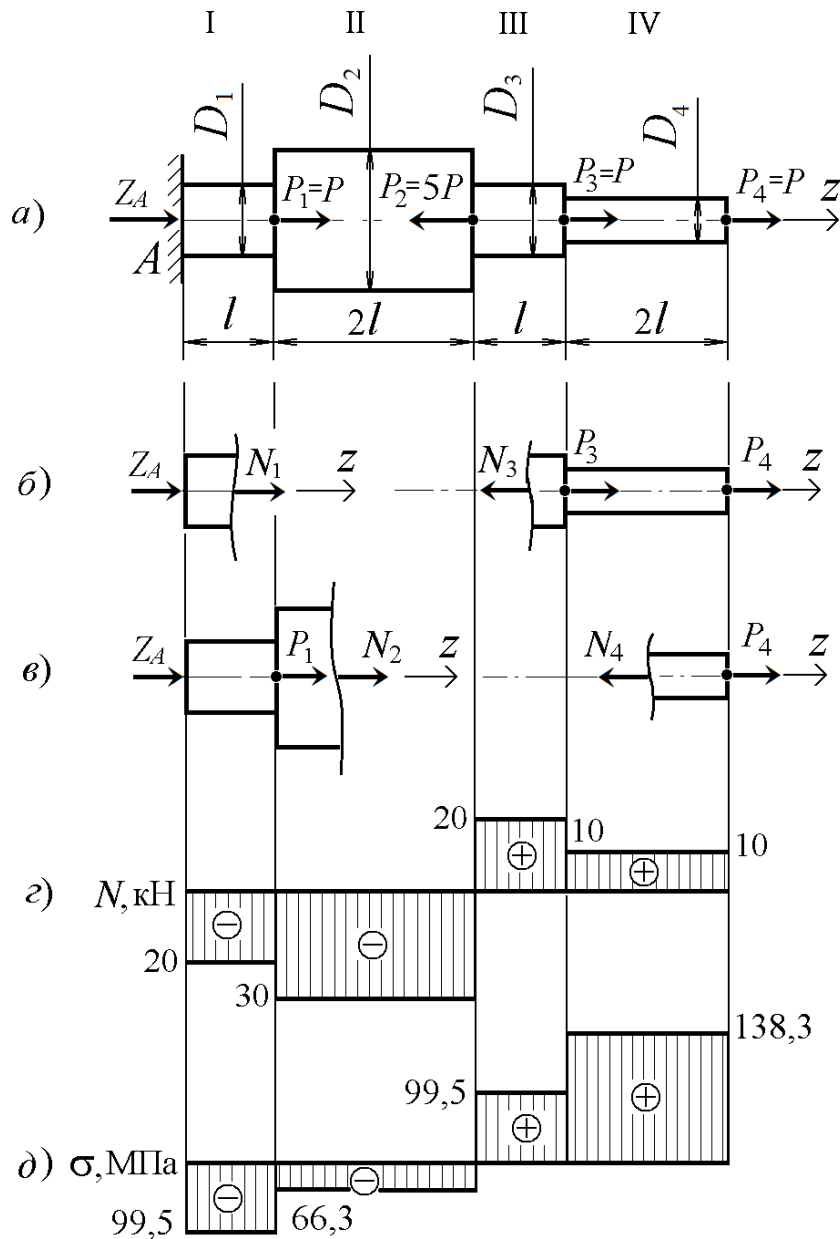


Рис. 2.5. Расчетная схема стержня

В соответствии с исходными данными площади поперечных сечений участков составляют

$$F_1 = F_3 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi (2D)^2}{4} = \pi D^2 = \pi \cdot 8^2 = 201 \text{ мм}^2;$$

$$F_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi (3D)^2}{4} = \frac{\pi (3 \cdot 8)^2}{4} = 452,2 \text{ мм}^2;$$

$$F_4 = \frac{\pi D_4^2}{4} = \frac{\pi (1,2D)^2}{4} = \frac{\pi (1,2 \cdot 8)^2}{4} = 72,3 \text{ мм}^2.$$

Решение

1. Определяем опорную реакцию Z_A из уравнения равновесия (сумма проекций всех сил на ось z):

$$\Sigma Z = 0; Z_A + P_1 - P_2 + P_3 + P_4 = 0;$$

$$Z_A = -P_1 + P_2 - P_3 - P_4; Z_A = -P + 5P - P - P = 2P.$$

2. Определяем нормальные усилия N_i на каждом участке, применяя метод сечений.

В произвольном сечении i -го участка нормальное усилие N_i равно алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от сечения, на нормаль к сечению, т.е. на ось Z :

$$N_i = \sum_1^n P_i.$$

Растягивающие усилия считаются положительными, сжимающие – отрицательными. При составлении уравнений направление внутреннего усилия N_i полагаем растягивающим (положительным), т.е. направленным в сторону внешней нормали к произвольному сечению.

Если в результате расчета усилие N_i примет отрицательное значение, это указывает на то, что направление усилия противоположно предполагаемому.

Рассмотрим отсеченную часть стержня. На рис. 2.5,б,в показано применение метода сечений для I, II, III и IV участков:

– на I участке $N_1 = -Z_A = -2P$ (знак «-» указывает на то, что Z_A сжимает участок I);

– на II участке $N_2 = -Z_A - P_1 = -2P - P = -3P$;

– на III участке $N_3 = P_4 + P_3 = P + P = 2P$;

– на IV участке $P_4 = P$.

Отрицательные значения усилий N_1 и N_2 показывают, что участки I и II работают на сжатие. Подставив числовое значение $P = 10 \text{ кН}$, получим

$$N_1 = -20 \text{ кН}; N_2 = -30 \text{ кН}; N_3 = 20 \text{ кН}; N_4 = 10 \text{ кН}.$$

По полученным результатам строим эпюру нормальных усилий N (рис. 2.5,з).

3. Определяем нормальные напряжения σ_i по формуле (2.1) на каждом участке:

$$- \text{ на I участке: } \sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-20 \cdot 10^3}{201} = -99,5 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = -99,5 \text{ МПа};$$

$$- \text{ на II участке: } \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-30 \cdot 10^3}{452,2} = -66,3 \text{ МПа};$$

$$- \text{ на III участке: } \sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{20 \cdot 10^3}{201} = 99,5 \text{ МПа};$$

$$- \text{ на IV участке: } \sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{10 \cdot 10^3}{72,3} = 138,3 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений σ (рис. 2.5,д).

Из эпюры σ следует, что наиболее нагружен IV участок стержня (опасный участок). При центральном растяжении условие прочности (2.14) имеет вид $\max \sigma \leq [\sigma]$, так как материал стержня пластичный.

Так как $\max \sigma = 138,3 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$, условие прочности выполняется.

4. Вычисляем полную деформацию стержня как алгебраическую сумму абсолютных деформаций Δl_i его участков (2.7):

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i, \text{ где в соответствии с (2.6) } \Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E F_i} = \frac{\sigma_i l_i}{E}.$$

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } \Delta l &= \frac{1}{E} (\sigma_1 l_1 + \sigma_2 l_2 + \sigma_3 l_3 + \sigma_4 l_4) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^5} (-99,5 \cdot 50 - 66,3 \cdot 100 + 99,5 \cdot 50 + 138 \cdot 100) = 0,036 \text{ мм}. \end{aligned}$$

П р и м е ч а н и е. Если на каком-то участке (например, на IV) условие прочности не выполняется, то на этом участке необходимо изменить размеры поперечного сечения и обеспечить выполнение условия прочности

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} \leq [\sigma].$$

Так как $F_4 = \frac{\pi D_4^2}{4}$, то условие прочности принимает вид

$$\sigma_4 = 4 \frac{N_4}{\pi D_4^2} \leq [\sigma].$$

Отсюда получаем, что диаметр должен удовлетворять условию

$$D_4 \geq \sqrt{\frac{4N_4}{\pi[\sigma]}}.$$

Выбрав новый размер поперечного сечения, необходимо на этом участке рассчитать напряжение и только после этого вычислить полную деформацию стержня Δl .

2.6.2. Расчет статически неопределимого стержня

Стержень постоянного круглого поперечного сечения зашпечен обоими торцами и нагружен продольными силами (рис. 2.6,а).

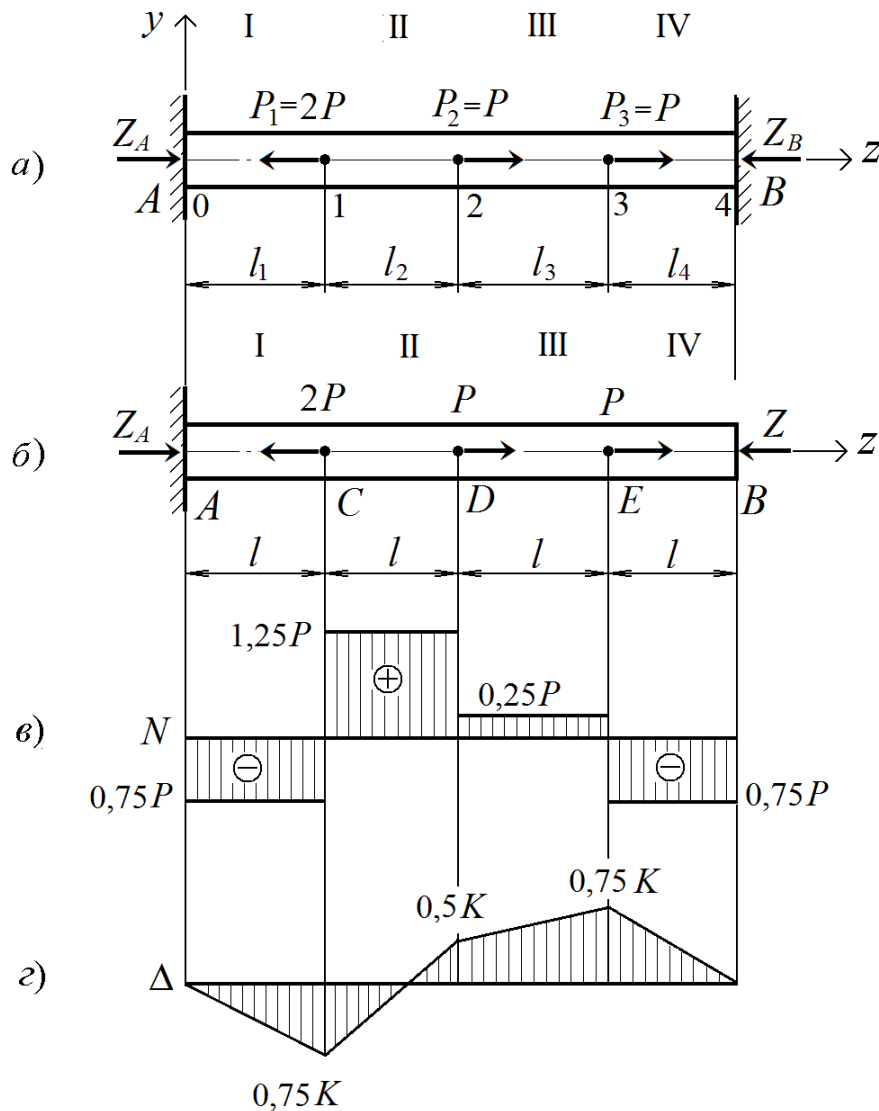


Рис. 2.6. Расчетная схема стержня

Необходимо раскрыть статическую неопределимость, построить эпюру нормальных усилий N и эпюру линейных перемещений Δ .

Затем выполнить проектный расчет на прочность, считая, что стержень изготовлен из материала сталь с характеристиками $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и $[\sigma] = 160$ МПа; $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$; $l = 80$ мм; $P = 10$ кН.

1. Составляем уравнения равновесия

$$\Sigma Z = 0; \quad Z_A - 2P + P + P - Z_B = 0 \quad \text{или} \quad Z_A = Z_B. \quad (2.19)$$

Получено одно уравнение с двумя неизвестными опорными реакциями Z_A и Z_B , т.е. система один раз статически неопределима.

2. Выбираем основную систему (рис. 2.6,б). Она получается из заданной путем освобождения от «лишней» связи. Принимаем за «лишнюю» связь защемление в опоре B . Нагружаем основную систему заданными силами и накладываем условие эквивалентности ее заданной системе: перемещение сечения B в заданной и основной системах должно быть одинаковым, т.е. $\Delta_B = 0$.

В сечении B приложим активную силу $Z = Z_B$, величина которой должна быть такой, чтобы выполнялось условие эквивалентной работы заданной и основной систем (рис. 2.6,б).

3. Раскрываем условие эквивалентности.

Перемещение Δ_B сечения B для основной системы выразим через приложенные нагрузки, применяя принцип независимости действия сил (нагрузки, вызывающие сжатие, считаем отрицательными):

$$\Delta_B = \Delta_B(P_i) + \Delta_B(Z) = 0, \quad (2.20)$$

где $\Delta_B(P_i)$ – перемещение сечения B от каждой из приложенных известных сил P_i ; $\Delta_B(Z)$ – перемещение сечения B от неизвестной силы Z .

Запишем данные выражения, используя формулу (2.6):

$$\begin{aligned} \Delta_B(P_1) &= -\frac{P_1 l_1}{EF} = -\frac{2Pl}{EF}; \quad \Delta_B(P_2) = \frac{P_2(l_1 + l_2)}{EF} = \frac{P2l}{EF}; \\ \Delta_B(P_3) &= \frac{P_3(l_1 + l_2 + l_3)}{EF} = \frac{P3l}{EF}; \quad \Delta_B(Z) = -\frac{Z(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)}{EF} = -\frac{Z4l}{EF}. \end{aligned}$$

В результате из (2.20) получим уравнение совместности деформаций для основной системы (рис. 2.6,б) в виде

$$-\frac{2Pl}{EF} + \frac{P2l}{EF} + \frac{P3l}{EF} - \frac{Z4l}{EF} = 0. \quad (2.21)$$

При составлении уравнения (2.21) учтено, что стержень имеет постоянное поперечное сечение на всех участках, т.е. $(EF)_i = EF = \text{const}$. Решая уравнение (2.21), получим $Z = Z_B = \frac{3}{4}P = 0,75P$.

Подставляя Z в (2.19), получаем значение опорной реакции в сечении A : $Z_A = 0,75P$.

Таким образом, статическая неопределимость раскрыта и определены опорные реакции.

4. Определяем нормальные усилия N_i методом сечений (см. п. 2.6.1). Разбиваем стержень на участки I, II, III, IV (см. рис. 2.6,б):

- на I участке $N_1 = -Z_A = -\frac{3}{4}P = -0,75P$;
- на II участке $N_2 = -Z_A + 2P = -0,75P + 2P = 1,25P$;
- на III участке $N_3 = -Z_A + 2P - P = -0,75P + 2P - P = 0,25P$;
- на IV участке $N_4 = -Z_B = 0,75P$.

По полученным значениям строим эпюру нормальных усилий N , которая приведена на рис. 2.6,в.

5. Для основной системы строим эпюру перемещений, определяя перемещения в сечениях (0, 1, 2, 3, 4), используя следующее правило их подсчета.

Перемещение сечения в конце участка равно перемещению сечения в начале этого участка плюс его абсолютная «деформация» на участке

$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + \frac{N_i l_i}{(EF)_i}, \quad (2.22)$$

где $i = 1, 2, \dots$ – номер участка стержня.

Перемещение сечения 0: $\Delta_0 = 0$.

Перемещение сечения 1: $\Delta_1 = \Delta_0 + \frac{N_1 l_1}{EF} = -0,75 \frac{Pl}{EF}$.

Перемещение сечения 2:

$$\Delta_2 = \Delta_1 + \frac{N_2 l_2}{EF} = -0,75 \frac{Pl}{EF} + 1,25 \frac{Pl}{EF} = 0,5 \frac{Pl}{EF}.$$

Перемещение сечения 3:

$$\Delta_3 = \Delta_2 + \frac{N_3 l_3}{EF} = 0,5 \frac{Pl}{EF} + 0,25 \frac{Pl}{EF} = 0,75 \frac{Pl}{EF}.$$

Перемещение сечения 4:

$$\Delta_4 = \Delta_3 + \frac{N_4 l_4}{EF} = 0,75 \frac{Pl}{EF} - 0,75 \frac{Pl}{EF} = 0.$$

Эпюра продольных перемещений приведена на рис. 2.6,з, где для удобства введено дополнительное обозначение $K = \frac{Pl}{EF}$.

6. Выполним проектный расчет на прочность.

Из анализа эпюры продольных сил N (рис. 2.6,в) следует, что так как площадь поперечного сечения является постоянной, то наиболее нагруженным является второй участок, на котором продольная сила принимает максимальное значение $\max N = N_2 = 1,25 P$.

Таким образом, максимальные напряжения равны $\max \sigma = \frac{\max N}{F} = 1,25 \frac{P}{F}$, а условие прочности записывается в виде $\max \sigma \leq [\sigma]$, т.е. $1,25 \frac{P}{F} \leq [\sigma]$.

Отсюда следует, что площадь поперечного сечения стержня должна удовлетворять условию

$$F \geq 1,25 \frac{P}{[\sigma]}.$$

Полагая $P = 10 \text{ кН} = 10^4 \text{ Н}$ и $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, получим

$$F \geq 1,25 \frac{10^4}{160} = 78,125 \text{ мм}^2.$$

Требуемый диаметр стержня, имеющего сплошное круглое поперечное сечение, равен

$$D \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 2 \sqrt{\frac{78,125}{\pi}} = 9,98 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем диаметр стержня равным $D = 10 \text{ мм}$. Площадь поперечного сечения в этом случае составляет

$$F = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 78,5 \text{ мм}^2.$$

В соответствии с эпюрой перемещений (рис. 2.6,з) максимальные перемещения имеют сечения 1 и 3, т.е.

$$\max \Delta = 0,75 \frac{Pl}{EF} = 0,75 \frac{10^4 \cdot 80}{2 \cdot 10^5 \cdot 78,5} = 0,038 \text{ мм}.$$

При этом сечение 1 (рис. 2.6,а) перемещается влево, а сечение 3 (рис. 2.6,б) вправо на величину $\max \Delta$.

Так как условие жесткости не поставлено, то проверка на жесткость статически неопределимого стержня не проводится.

П р и м е ч а н и е. Построение эпюры перемещений Δ для основной системы является деформационной проверкой. Равенство нулю перемещения концевого сечения $\Delta_A = \Delta_B = 0$ для основной системы показывает, что статическая неопределимость раскрыта верно, так как в заданной расчетной схеме (рис. 2.6,а) сечение B жестко закреплено, т.е. является неподвижным.

2.7. Особенности работы статически неопределимых систем

Существенной особенностью расчета статически неопределимых стержневых систем является то, что кроме уравнений равновесия для этих систем необходимо дополнительно составить уравнения совместности деформаций, число которых соответствует степени статической неопределимости.

При сборке (монтаже) статически неопределимых систем за счет неточности (допусков) изготовления отдельных элементов в них возникают дополнительные монтажные напряжения.

Если при эксплуатации статически неопределимой системы имеют место температурные воздействия (охлаждение или нагрев) на отдельные элементы или всю систему, то в ее элементах возникают дополнительные температурные напряжения.

Таким образом, применяя принцип суперпозиций, получаем, что в самом общем случае в элементах статически неопределимой системы возникают результирующие напряжения, которые в соответствии с принципом суперпозиций определяются выражением

$$\sigma = \sigma(P) + \sigma(\Delta) + \sigma(T). \quad (2.23)$$

Здесь $\sigma(P)$ – напряжения от внешних усилий; $\sigma(\Delta)$ – монтажные напряжения; $\sigma(T)$ – температурные напряжения. При расчете результирующих напряжений в (2.23) все напряжения подставляются с учетом их знаков.

Расчет монтажных, температурных и результирующих напряжений, возникающих в статически неопределимых стержневых системах, подробно рассмотрен в [6].

П р и м е ч а н и е. При действии температуры и монтаже в статически определимых системах температурных и монтажных напряжений не возникает.

При выполнении проектных расчетов статически неопределимых систем необходимо учитывать наличие температурных и монтажных напряжений, возникающих в элементах системы.

Покажем это на примере.

2.8. Полный расчет на прочность статически неопределимого стержня

Рассмотрим расчет на прочность ступенчатого статически неопределимого стержня с учетом монтажных и температурных напряжений, возникающих в нем при его сборке и эксплуатации.

На рис. 2.7,*а* показан стальной стержень до сборки. На каждом участке стержень имеет сплошное круглое поперечное сечение с диаметрами D_1 и D_2 : $D_1 = 2D$; $D_2 = D$. Длины участков $l_1 = l$; $l_2 = 2l$.

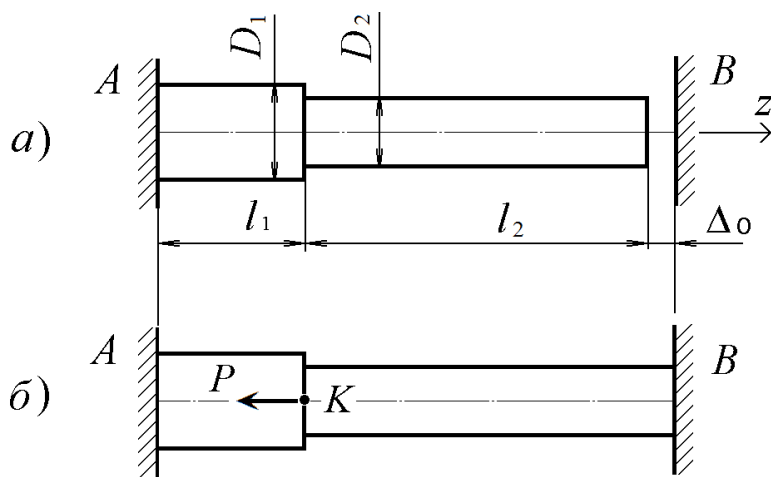


Рис. 2.7. Эскиз элемента конструкции:
а – до сборки; б – после сборки

Стержень изготовлен короче, т.е. при сборке (рис. 2.7,*а*) имеет место зазор величиной Δ_0 , что приводит к возникновению в стержне монтажных напряжений $\sigma(\Delta)$.

При эксплуатации на стержень (рис. 2.7,*б*) действует усилие P и температура T , что приводит к появлению дополнительных напряжений от внешних сил $\sigma(P)$ и температурных напряжений $\sigma(\Delta T)$ от градиента температур $\Delta T = T - T_0$. Здесь T_0 – температура, при которой выполнялась сборка элемента конструкции (обычно это нормальная температура $T_0 = +20$ °С). В этом случае при эксплуатации в поперечных сечениях стержня возникают результирующие напряжения, которые рассчитываются по формуле (2.23).

Рассмотрим последовательно этапы сборки и эксплуатации стержневой конструкции.

2.8.1. Расчет монтажных напряжений

При монтаже конструкции проводится сварка в сечении B , т.е. стержень необходимо растянуть на величину технологического зазора Δ_0 . Расчетная схема имеет вид, представленный на рис. 2.8,а.

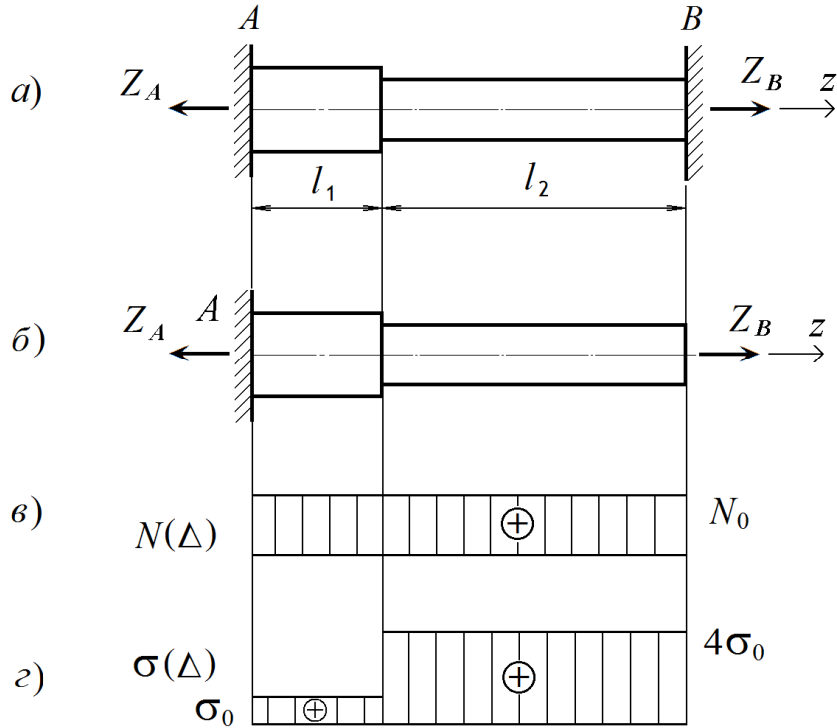


Рис. 2.8. Расчетная схема при сборке конструкции

В сечениях A и B возникают опорные реакции Z_A и Z_B , а сама система является статически неопределимой. На рис. 2.8,б показана основная система. При расчете учитываем, что технологический зазор Δ_0 является малым ($\Delta_0 \ll l$), т.е. $l_1 + \Delta_0 \approx l_1$.

Площади поперечного сечения на первом и втором участках соответственно составляют

$$F_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{4\pi D^2}{4} = \pi D^2; \quad F_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4} = 0,25\pi D^2.$$

Введем обозначение $F_2 = F = 0,25\pi D^2$, тогда $F_1 = 4F$.

Уравнение равновесия для основной системы имеет вид

$$\Sigma Z = 0; \quad -Z_A + Z_B = 0; \quad Z_A = Z_B. \quad (2.24)$$

Уравнение совместности деформаций составляем для основной системы (рис. 2.8,б,д)

$$\Delta_B = \Delta_0. \quad (2.25)$$

Перемещение сечения B с учетом (2.7) определяется выражением

$$\Delta_B = \frac{Z_B l_1}{EF_1} + \frac{Z_B l_2}{EF_2} = \frac{Z_B}{E} \left(\frac{l}{4F} + \frac{2l}{F} \right) = 2,25 \frac{l}{EF} Z_B.$$

С учетом уравнения (2.25) получим

$$2,25 \frac{l}{EF} Z_B = \Delta_0, \text{ т.е. } Z_B = \frac{4EF}{9l} \Delta_0, \text{ где } E - \text{модуль упругости}$$

материала стержня.

Таким образом, при монтаже элемента возникают опорные реакции

$$Z_A = Z_B = \frac{4}{9} \frac{EF}{l} \Delta_0, \quad (2.26)$$

На рис. 2.8,в показана эпюра внутренних монтажных усилий

$$N = N_0 = Z_B = \frac{4}{9} \frac{EF}{l} \Delta_0.$$

Монтажные напряжения на 1 и 2 участках соответственно равны

$$\sigma_1(\Delta) = \frac{N_1}{F_1} = \frac{N_0}{4F} = \frac{E}{9l} \Delta_0; \quad \sigma_2(\Delta) = \frac{N_2}{F_2} = \frac{N_0}{F} = \frac{4}{9} \frac{E}{l} \Delta_0. \quad (2.27)$$

Из соотношений (2.27) следует, что после сборки в поперечных сечениях стержня возникают растягивающие монтажные напряжения $\sigma_1(\Delta) = \sigma_0$; $\sigma_2(\Delta) = 4\sigma_0$, где введено обозначение

$$\sigma_0 = \frac{1}{9} \frac{E}{l} \Delta_0. \quad (2.28)$$

Эпюра этих напряжений показана на рис. 2.8,г.

Существенной особенностью является то, что монтажные напряжения зависят от модуля упругости материала стержня, длин его участков и величины зазора Δ_0 .

2.8.2. Расчет температурных напряжений

Пусть стержень эксплуатируется при температуре $T > T_0$, т.е. имеет место его нагрев. Градиент температур составляет $\Delta T = T - T_0 > 0$. При нагреве происходит расширение стержня и в его опорах, которые препятствуют этому расширению, возникают опорные реакции Z_A и Z_B . На рис. 2.9,а,б показаны заданная и основная системы соответственно при тепловом воздействии.

Уравнение равновесия для основной системы имеет вид

$$\Sigma Z = 0; \quad Z_A - Z_B = 0; \quad Z_A = Z_B. \quad (2.29)$$

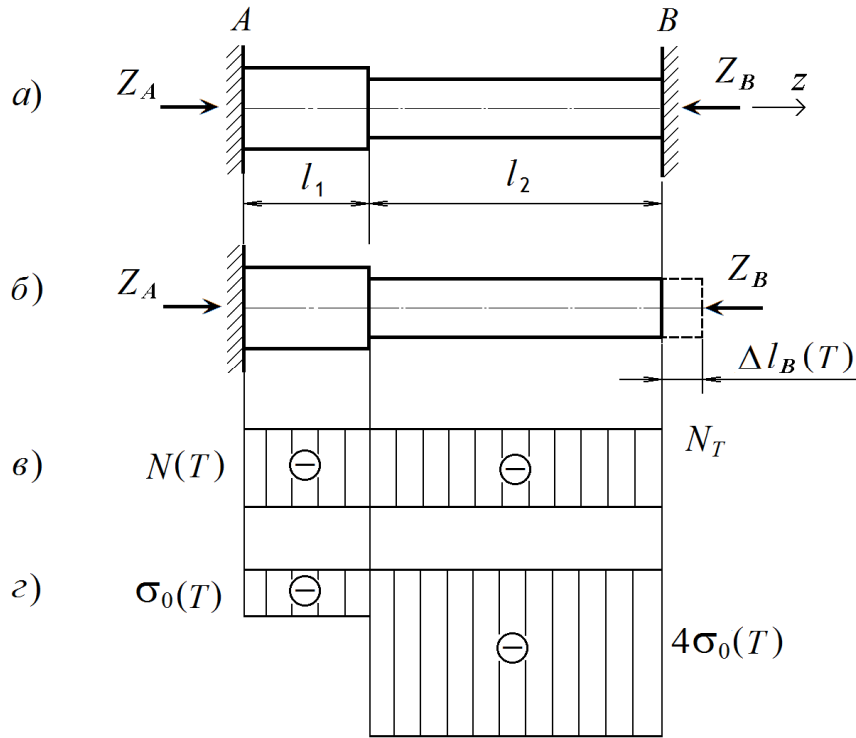


Рис. 2.9. Расчетная схема при температурном воздействии

Уравнение совместности деформаций для основной системы (рис. 2.9,б) имеет вид

$$\Delta_B(Z_B) + \Delta_B(T) = 0, \quad (2.30)$$

$$\text{где } \Delta_B(Z_B) = -\left(\frac{Z_B l_1}{EF_1} + \frac{Z_B l_2}{EF_2}\right) = -\frac{Z_B}{EF_1} \left(\frac{l}{4F} + \frac{2l}{F}\right) = -2,25 \frac{Z_B l}{EF},$$

$$\Delta_B(T) = \alpha \Delta T (l_1 + l_2) = \alpha \Delta T (l + 2l) = 3\alpha \Delta T l.$$

Здесь $\Delta_B(Z_B)$ – перемещение сечения B от усилия Z_B ; $\Delta_B(T)$ – перемещение сечения B за счет изменения температуры (при нагреве стержень удлиняется); α – коэффициент линейного температурного расширения (КЛТР), величина которого зависит от свойств материала [3].

С учетом полученных соотношений уравнение (2.30) примет вид

$$2,25 \frac{Z_B l}{EF} = 3\alpha \Delta T l,$$

что позволяет определить опорные реакции, возникающие при тепловом воздействии:

$$Z_A = Z_B = N_T = \frac{4}{3} \alpha \Delta T E F; \quad N_T < 0. \quad (2.31)$$

Эпюра продольных сил при тепловом воздействии показана на рис. 2.9,в. На каждом участке стержня при этом возникают сжимающие напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_1(T) &= \frac{N_1}{F_1} = -\frac{N_T}{4F} = -\frac{1}{3}\alpha\Delta TE = -\sigma_0(T); \\ \sigma_2(T) &= \frac{N_2}{F_2} = -\frac{N_T}{F} = -\frac{4}{3}\alpha\Delta TE = -4\sigma_0(T),\end{aligned}\quad (2.32)$$

где принято обозначение $\sigma_0(T) = \frac{1}{3}\alpha\Delta TE$.

Эпюра температурных напряжений показана на рис. 2.9,г.

Таким образом, при нагреве оба участка стержня оказываются сжатыми, а величина температурных напряжений существенно зависит от модуля упругости материала стержня и длин его участков.

П р и м е ч а н и е. Если происходит охлаждение стержня ($\Delta T < 0$), то задача решается аналогично, но участки стержня при охлаждении оказываются растянутыми.

2.8.3. Расчет напряжений от внешних сил

На стержень действует внешняя нагрузка P согласно расчетной схеме, представленной на рис. 2.10,а.

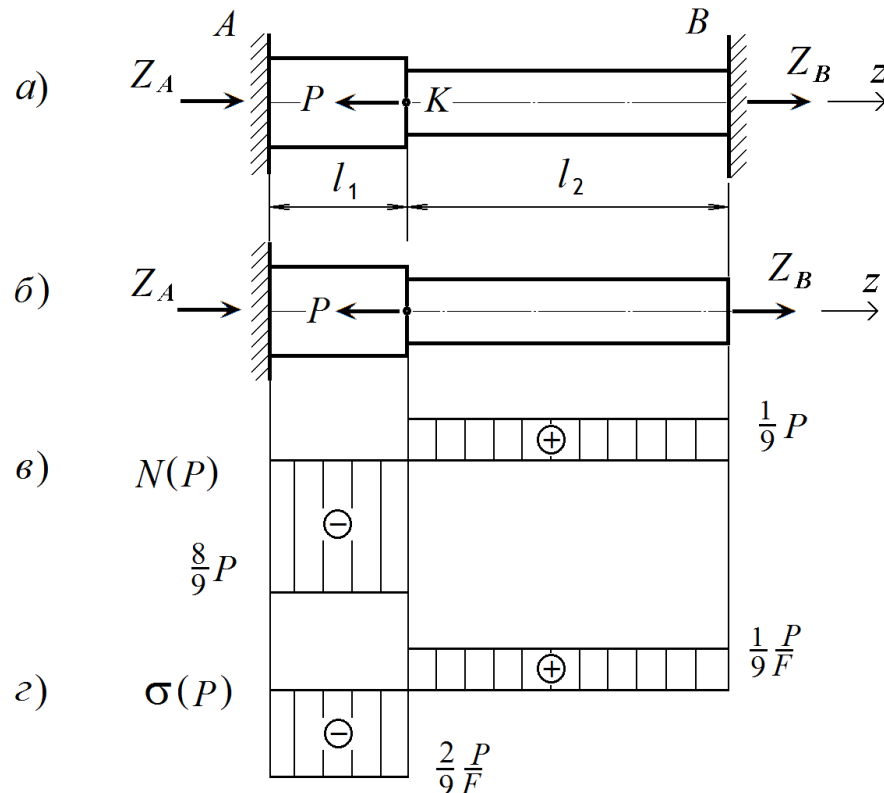


Рис. 2.10. Расчетная схема при силовом воздействии

Основная система показана на рис. 2.10,б. Уравнения равновесия имеют вид

$$\Sigma Z = 0; \quad Z_A + Z_B = P; \quad Z_A = P - Z_B. \quad (2.33)$$

Уравнения совместности деформаций для основной системы записываются в виде

$$\Delta_B = 0; \quad \Delta_B = \Delta_B(P) + \Delta_B(Z_B) = 0. \quad (2.34)$$

Перемещение сечения B от силы P равно

$$\Delta_B(P) = -\frac{Pl_1}{EF_1} = -\frac{Pl}{E4F} = -\frac{Pl}{4EF}.$$

Перемещение сечения B от усилия Z_B равно

$$\Delta_B(Z_B) = \frac{Z_B l_1}{EF_1} + \frac{Z_B l_2}{EF_2} = \frac{Z_B l}{EF} \left(\frac{1}{4} + 2 \right) = 2,25 \frac{l}{EF} Z_B.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.34), получим

$$-\frac{Pl}{4EF} + 2,25 \frac{l}{EF} Z_B = 0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$Z_B = \frac{1}{9} P,$$

а из уравнения (2.33) получим $Z_A = \frac{8}{9} P$.

Эпюра продольных сил, построенная на каждом участке методом сечений, показана на рис. 2.10,в.

От действия внешней нагрузки в поперечных сечениях на каждом участке возникают нормальные напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N_1}{F_1} = -\frac{Z_A}{4F} = -\frac{8}{9} \cdot \frac{P}{4F} = -\frac{2}{9} \frac{P}{F}, \\ \sigma_2 &= \frac{N_2}{F_2} = \frac{Z_B}{F_2} = \frac{P}{9F}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Эпюра нормальных напряжений от внешней нагрузки $\sigma(P)$ показана на рис. 2.10,г.

2.8.4. Расчет результирующих напряжений при эксплуатации конструкции

При эксплуатации стержневого элемента конструкции с учетом температурных воздействий и монтажных напряжений в его поперечных сечениях возникают результирующие напряжения (2.23):

– на первом участке

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_1(\Delta) + \sigma_1(T) + \sigma_1(P) = \frac{1}{9} \frac{E}{l} \Delta_0 - \frac{1}{3} \alpha \Delta T E - \frac{2}{9} \frac{P}{F} = \\ &= \frac{E}{9} \left(\frac{\Delta_0}{l} - 3\alpha \Delta T - 2 \frac{P}{EF} \right); \end{aligned} \quad (2.36)$$

– на втором участке

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sigma_2(\Delta) + \sigma_2(T) + \sigma_2(P) = \frac{4}{9} \frac{E}{l} \Delta_0 - \frac{4}{3} \alpha \Delta T E + \frac{P}{9F} = \\ &= \frac{4E}{9} \left(\frac{\Delta_0}{l} - 3\alpha \Delta T + \frac{P}{4EF} \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Анализ выражений (2.36) и (2.37) показывает, что наиболее нагруженным является второй участок, так как $\sigma_2 > \sigma_1$.

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\max \sigma = \sigma_2 = \frac{4}{9} E \left(\frac{\Delta_0}{l} - 3\alpha \Delta T + \frac{P}{4EF} \right). \quad (2.38)$$

Условие прочности (2.14) принимает вид

$$\max \sigma = \frac{4}{9} E \left(\frac{\Delta_0}{l} - 3\alpha \Delta T + \frac{P}{4EF} \right) \leq [\sigma]. \quad (2.39)$$

Используя условия прочности (2.39), можно решать различные поставленные задачи:

1. Выполнить проверочный расчет на прочность при заданных условиях эксплуатации конструкции.

2. Определить требуемую площадь поперечного сечения F и его размеры (например, диаметр $D = \sqrt{4F/\pi}$). Здесь из условия прочности (2.39) следует, что площадь поперечного сечения F должна удовлетворять условию

$$F \geq \frac{0,25P}{2,25[\sigma] + \left(3\alpha \Delta T - \frac{\Delta_0}{l} \right) E}. \quad (2.40)$$

3. Определить допускаемую внешнюю нагрузку P при известных Δ_0 и ΔT :

$$P \leq 4EF \left(2,25 \frac{[\sigma]}{E} + 3\alpha \Delta T - \frac{\Delta_0}{l} \right). \quad (2.41)$$

4. При заданных P , ΔT , F , l определить допускаемый максимальный технологический зазор Δ_0 и по нему определить допуск на длину при изготовлении стержневого элемента:

$$\Delta_0 \leq kl, \quad (2.42)$$

где безразмерный коэффициент k определяется соотношением

$$k = 2,25 \frac{[\sigma]}{E} + 3\alpha \Delta T - \frac{P}{4EF}. \quad (2.43)$$

5. При заданных P , Δ_0 , F , l можно определить допускаемый градиент температур ΔT и по нему максимальную (или) минимальную температуру эксплуатации конструктивного элемента $T = \Delta T + T_0$:

$$\Delta T \leq \frac{1}{\alpha} \left(2,25 \frac{[\sigma]}{E} - \frac{\Delta_0}{l} - \frac{P}{4EF} \right). \quad (2.44)$$

П р и м е ч а н и я: 1. Если стержень изготовлен больше требуемой длины на величину Δ_0 , то при его монтаже возникают сжимающие монтажные напряжения ($\sigma_1(\Delta) < 0$; $\sigma_2(\Delta) < 0$).

2. Если стержень работает при отрицательных температурах ($T < 0$), то $\Delta T < 0$ и в поперечных сечениях стержня возникают растягивающие температурные напряжения $\sigma_1(T) > 0$; $\sigma_2(T) > 0$.

2.8.5. Численный пример

Выполним проверочный численный расчет для стержневого элемента, представленного выше при следующих исходных данных:

$$l = 0,5 \text{ м} = 500 \text{ мм};$$

$$D = 10 \text{ мм, площадь } F = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 78,5 \text{ мм}^2;$$

$$\Delta_0 = 0,5 \text{ мм};$$

$$T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C, температура эксплуатации } T = 80 \text{ }^\circ\text{C, т.е. } \Delta T = 80 - 20 = 60 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$P = 10 \text{ кН} = 10^4 \text{ Н.}$$

Материал стержня – Сталь 20, предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа; коэффициент запаса по текучести $n_T = 1,5$; допускаемое напряжение $[\sigma] = \sigma_T / n_T = 240 / 1,5 = 160$ МПа; модуль упругости материала стержня $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Коэффициент линейного температурного расширения $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Вычислим по отдельности монтажные, температурные и силовые напряжения:

1. Монтажные напряжения (2.27):

$$\sigma_1(\Delta) = \sigma_0 = \frac{1}{9} \frac{E}{l} \Delta_0 = \frac{1}{9} \frac{2 \cdot 10^5}{500} 0,5 = 22,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2(\Delta) = 4\sigma_0 = 4 \cdot 22,2 = 88,8 \text{ МПа.}$$

2. Температурные напряжения (2.32):

$$\sigma_1(T) = -\sigma_0(T) = -\frac{1}{3} \alpha \Delta T E = -\frac{1}{3} 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 2 \cdot 10^5 = -50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2(T) = -4\sigma_0(T) = -4 \cdot 50 = -200 \text{ МПа.}$$

3. Напряжения от действия внешней силы (2.35):

$$\sigma_1(P) = -\frac{2}{9} \frac{P}{F} = \frac{2 \cdot 10^4}{9 \cdot 78,5} = -28,31 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2(P) = -\frac{P}{9F} = \frac{10^4}{9 \cdot 78,5} = 14,15 \text{ МПа.}$$

4. Результирующие напряжения (2.36) и (2.37):

$$\sigma_1 = 22,2 - 50 - 28,31 = -56,11 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 88,8 - 200 + 14,15 = 97,05 \text{ МПа.}$$

Таким образом, максимальные результирующие напряжения достигаются на втором участке стержня

$$\max \sigma = \sigma_2 = 97,05 \text{ МПа.}$$

Условие прочности $\max \sigma \leq [\sigma]$ выполняется, так как

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Контрольные вопросы

1. Какие внутренние силовые факторы возникают при растяжении и сжатии элемента конструкции?

2. Какой вид нагружения называется растяжением (сжатием)?
3. Сформулируйте суть метода сечений при растяжении и сжатии.
4. Сформулируйте правила знаков для продольных сил.
5. Как вычисляются нормальные напряжения при растяжении (сжатии)?
6. Как определяются перемещения при растяжении (сжатии)?
7. Запишите закон Гука при растяжении (сжатии).
8. Как определяется коэффициент Пуассона?
9. Нарисуйте диаграмму растяжения образца и укажите ее основные зоны.
10. Что такое предел пропорциональности, предел текучести и предел прочности материала?
11. Назовите характеристики, определяющие пластичность материала.
12. Как определяются допускаемые напряжения для пластичных и хрупких материалов?
13. От каких факторов зависит значение коэффициента запаса прочности?
14. Какие системы называются статически неопределимыми?
15. Как составляются уравнения совместности деформаций (привести пример)?

3. Геометрические характеристики плоских сечений

3.1. Основные соотношения

При расчетах на прочность элементов конструкций кроме площади поперечного сечения F используются и другие геометрические характеристики плоского поперечного сечения, определяющие его жесткость при изгибе, кручении, сложных видах деформаций, при расчетах на устойчивость и динамическое действие внешних нагрузок [1, 2].

Статическими моментами сечения называются интегралы вида (рис. 3.1)

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF. \quad (3.1)$$

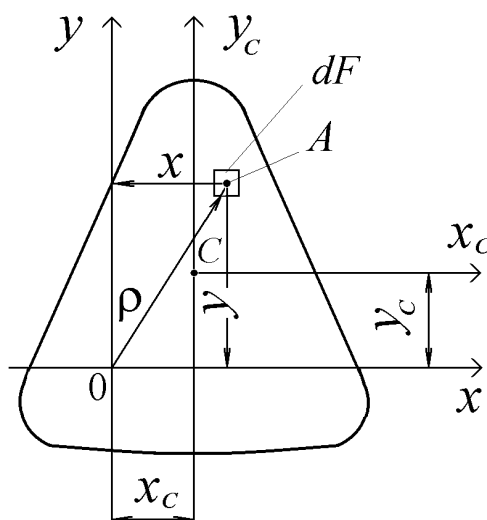


Рис. 3.1. Поперечное сечение

Здесь x, y – координаты произвольной точки A сечения с координатами x и y ; dF – площадь бесконечно малой площадки, выделенной возле точки A . Интегрирование в (3.2) ведется по всей площади F поперечного сечения.

Оси, относительно которых статические моменты равны нулю ($S_x = S_y = 0$), называются центральными и обозначаются x_c и y_c . Точка их пересечения (т. C) называется центром тяжести.

Координаты центра тяжести x_c и y_c , определяются выражениями

$$x_c = \frac{\sum_{j=1}^n F_j x_{cj}}{\sum_{j=1}^n F_j}; \quad y_c = \frac{\sum_{j=1}^n F_j y_{cj}}{\sum_{j=1}^n F_j}. \quad (3.2)$$

Здесь $j = 1, 2, \dots, n$ – номера элементарных сечений, на которые можно разбить заданное сечение; n – число этих сечений; F_j – площадь элементарного сечения; x_{cj} и y_{cj} – координаты центра тяжести элементарного сечения в принятой системе координат. Положение и координаты центра тяжести элементарных сечений (прямоугольник, треугольник, круг, эллипс и др.) приведены в прил. 2.

Осевыми моментами инерции называются интегралы вида

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF. \quad (3.3)$$

Полярным моментом инерции называется интеграл вида

$$J_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (3.4)$$

Так как $\rho^2 = x^2 + y^2$ (см. рис. 3.1), получим

$$J_p = J_x + J_y. \quad (3.5)$$

Центробежный момент инерции определяется выражением

$$J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (3.6)$$

Существенным свойством центробежного момента является то, что он может принимать положительные, отрицательные и нулевые значения в зависимости от расположения исходных осей x и y (см. рис. 3.1).

Оси, относительно которых центробежный момент равен нулю ($J_{xy} = 0$), называются главными.

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями. Во всех дальнейших расчетах эти оси будем обозначать x и y (рис. 3.2).

Момент инерции поперечного сечения относительно осей x_1 и y_1 , параллельных главным центральным осям x и y , вычисляется по формулам

$$J_{x1} = J_x + b^2 F; \quad J_{y1} = J_y + a^2 F, \quad (3.7)$$

где J_x, J_y – моменты инерции относительно главных центральных осей; a, b – расстояния между параллельными осями (рис. 3.2).

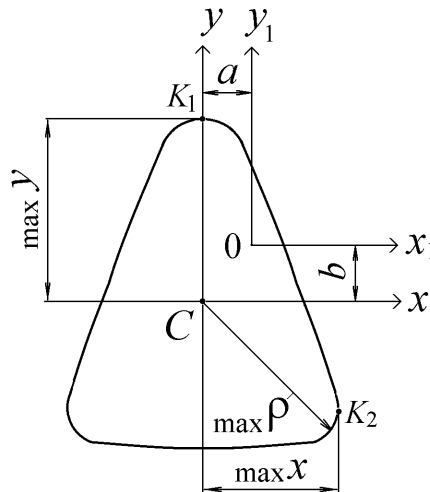


Рис. 3.2. Расположение главных центральных осей x и y

При определении положения главных центральных осей следует использовать следствие из их определения.

Если поперечное сечение имеет хотя бы одну ось симметрии, то эта ось является главной центральной. Если сечение имеет две оси симметрии, то обе они являются главными центральными, а центр тяжести лежит в точке их пересечения.

Моментами сопротивления поперечного сечения являются геометрические характеристики, которые определяются по формулам

$$W_x = \frac{J_x}{\max y}; \quad W_y = \frac{J_y}{\max x}, \quad (3.8)$$

где $\max y$ и $\max x$ – расстояния до наиболее удаленных точек (K_1 и K_2) сечения, расположенных на внешнем контуре сечения (рис. 3.2).

Полярным моментом сопротивления называется геометрическая характеристика

$$W_p = \frac{J_p}{\max \rho}, \quad (3.9)$$

где $\max \rho$ – максимальное расстояние от центра тяжести сечения до внешнего контура сечения.

Если сечение имеет выступающие углы, то наиболее удаленными точками сечения являются его угловые точки, расположенные на внешнем контуре поперечного сечения.

Радиусы инерции поперечного сечения определяются по формулам

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}. \quad (3.10)$$

Все геометрические характеристики и координаты, определяющие положение центра тяжести простейших сечений, приведены в прил. 2. Геометрические характеристики стандартных профилей поперечных сечений (двутавр, швеллер, уголок) приведены в прил. 3.

П р и м е ч а н и е. При проведении расчетов на прочность при различных видах нагружения в поперечных сечениях элементов конструкций используют главные центральные оси, которые обозначают x и y .

3.2. Пример расчета геометрических характеристик поперечного сечения

Для заданного поперечного сечения (рис. 3.3) вычислить геометрические характеристики $J_x, J_y, W_x, W_y, i_x, i_y$ относительно главных центральных осей. Все геометрические характеристики вычислить через параметр сечения b .

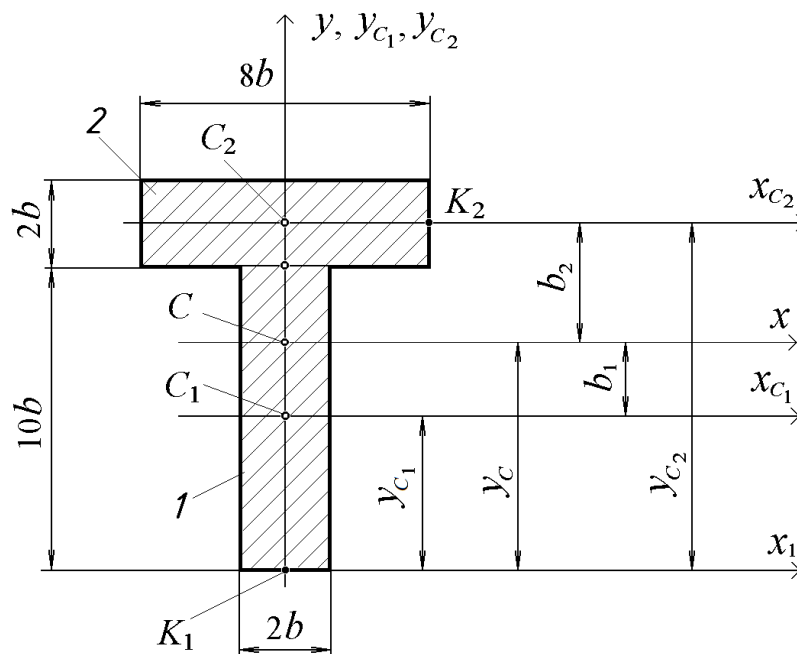


Рис. 3.3. Вид поперечного сечения

Так как сечение является симметричным, то вертикальная ось симметрии y является главной центральной осью. Для решения

задачи введем по нижней кромке сечения вспомогательную ось x_1 . В этом случае все сечение расположено выше оси x_1 , т.е. все координаты центров тяжести элементарных сечений C_1 и C_2 являются положительными.

Разобьем сечение на два прямоугольника 1 и 2 и проведем их «собственные» главные центральные оси x_{C1} , y_{C1} и x_{C2} , y_{C2} . Определим положение центра тяжести сечения по формуле (3.2)

$$y_C = \frac{F_1 y_{C1} + F_2 y_{C2}}{F_1 + F_2}, \quad (3.11)$$

где F_1 , F_2 – площадь прямоугольников 1 и 2; y_{C1} и y_{C2} – координаты их центров тяжести C_1 и C_2 относительно оси x_1 :

$$y_{C1} = 5b; \quad F_1 = 10b \cdot 2b = 20b^2; \quad y_{C2} = 11b; \quad F_2 = 8b \cdot 2b = 16b^2.$$

В соответствии с (3.11) получим координату центра тяжести C всего сечения

$$y_C = \frac{20b^2 \cdot 5b + 16b^2 \cdot 11b}{20b^2 + 16b^2} = 7,67b.$$

Отмечаем положение центра тяжести сечения C и проводим вторую главную центральную ось сечения x .

Осевой момент инерции сечения относительно оси x равен

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)}. \quad (3.12)$$

В соответствии с (3.7)

$J_x^{(1)} = J_{x_{C1}}^{(1)} + F_1 b_1^2$; $J_x^{(2)} = J_{x_{C2}}^{(2)} + F_2 b_2^2$ – моменты инерции 1-го и 2-го прямоугольников относительно оси x ; $J_{x_{C1}}^{(1)}$, $J_{x_{C2}}^{(2)}$ – моменты инерции каждого прямоугольника относительно их собственных главных центральных осей x_{C1} и x_{C2} соответственно; b_1 и b_2 – расстояния между осями x и x_{C1} , аналогично x и x_{C2} . Из рис. 3.3 следует, что

$$b_1 = y_C - y_{C1} = 7,67b - 5b = 2,67b;$$

$$b_2 = y_{C2} - y_C = 11b - 7,67b = 3,33b.$$

Моменты инерции каждого прямоугольника относительно его главных осей вычисляются по формулам (см. прил. 2)

$$J_{x_{C1}}^{(1)} = \frac{2b(10b)^3}{12} = 166,7b^4, \quad J_{x_{C2}}^{(2)} = \frac{8b(2b)^3}{12} = 5,33b^4.$$

Момент инерции для всего поперечного сечения вычисляем по формуле (3.12)

$$J_x = (J_{xC1}^{(1)} + b_1^2 F_1) + (J_{xC2}^{(2)} + b_2^2 F_2) = \\ = (166,7b^2 + (2,67b)^2 \cdot 20b^2) + (5,33b^4 + (3,33b)^2 \cdot 16b^2) = 492,4b^4.$$

Момент инерции относительно оси y вычисляется гораздо проще, так как ось y является осью симметрии всего сечения и сечений 1 и 2, т.е. главные центральные оси y_1 и y_{C1} и y_{C2} совпадают (рис. 3.3).

В этом случае момент инерции

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)}, \quad (3.13)$$

$$\text{где } J_y^{(1)} = \frac{10b \cdot (2b)^3}{12} = 6,67b^4; \quad J_y^{(2)} = \frac{2b \cdot (8b)^3}{12} = 85,33b^4.$$

Момент инерции всего сечения (3.13) равен

$$J_y = 6,67b^4 + 85,33b^4 = 92b^4.$$

Наиболее удаленные от осей x и y точки сечения K_1 и K_2 (рис. 3.3) имеют координаты

$$\max y = y_{K1} = y_C = 7,67b; \quad \max x = x_{K2} = 4b.$$

Моменты сопротивления сечения (3.8) равны

$$W_x = \frac{J_x}{\max y} = \frac{492,4b^4}{7,67b} = 64,2b^3; \quad W_y = \frac{J_y}{\max x} = \frac{92b^4}{4b} = 23b^3.$$

Площадь всего поперечного сечения равна

$$F = F_1 + F_2 = 20b^2 + 16b^2 = 36b^2.$$

Радиусы инерции определяются выражениями (3.10) и равны

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{492,4b^4}{36b^2}} = \frac{b}{6} \sqrt{492,4} = 3,7b; \\ i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{92b^4}{36b^2}} = \frac{b}{6} \sqrt{92} = 1,6b.$$

В табл. 3.1 приведены расчетные геометрические характеристики рассмотренного сечения.

Результаты расчета геометрических характеристик сечения

F	J_x	J_y	W_x	W_y	i_x	i_y
$36b^2$	$492,4b^4$	$92b^4$	$64,2b^3$	$23b^3$	$3,7b$	$1,6b$

П р и м е ч а н и е. Если поперечное сечение имеет отверстия, то геометрические характеристики отверстий F , J_x , J_y следует считать отрицательными.

Вопросы расчета моментов инерции поперечного сечения при повороте осей подробно рассмотрены в [1, 2].

Контрольные вопросы

1. Приведите определение статических моментов инерции плоских сечений.
2. Дайте определение осевых и центробежного моментов инерции поперечного сечения.
3. Дайте определение полярного момента инерции поперечного сечения.
4. Как связаны между собой полярный и осевые моменты инерции?
5. Запишите формулы для расчета осевых и полярного моментов инерции простейших сечений: прямоугольника, круга, кольца.
6. Как определяется положение координат центра тяжести сложного поперечного сечения?
7. Какие оси называются центральными?
8. Какие оси называются главными?
9. Какими свойствами обладают оси симметрии поперечного сечения?
10. Как вычисляются моменты инерции сечения при параллельном переносе осей?
11. Как вычисляются моменты сопротивления сечений: осевые, полярный?
12. Запишите формулы для вычисления моментов сопротивления простейших сечений: прямоугольника, круга, кольца.
13. Как определяются моменты инерции и моменты сопротивления стандартных профилей (швеллер, двутавр, уголок)?
14. Как вычисляются радиусы инерции поперечных сечений?
15. Какие оси поперечного сечения называются главными центральными?

4. Кручение валов

4.1. Основные соотношения

Рассматриваем кручение стержней (валов), имеющих круглое сплошное или кольцевое поперечное сечение. В этом случае выполняется гипотеза плоских поперечных сечений [1, 2].

При кручении стержней в поперечных сечениях возникают крутящие моменты $M_{кр}$, которые определяются методом сечений на каждом участке стержня. По результатам расчетов строится эпюра крутящих моментов. При построении эпюры $M_{кр}$ используем следующее правило знаков.

Внешний момент, действующий на отсеченную часть стержня, считается положительным, если при взгляде со стороны внешней нормали к отсеченной части, он вращает ее против часовой стрелки.

Под действием крутящего момента $M_{кр}$ в точках A поперечного сечения, расположенных на радиусе ρ , возникают касательные напряжения τ , эпюры которых в плоскости сечения показаны на рис. 4.1,а.

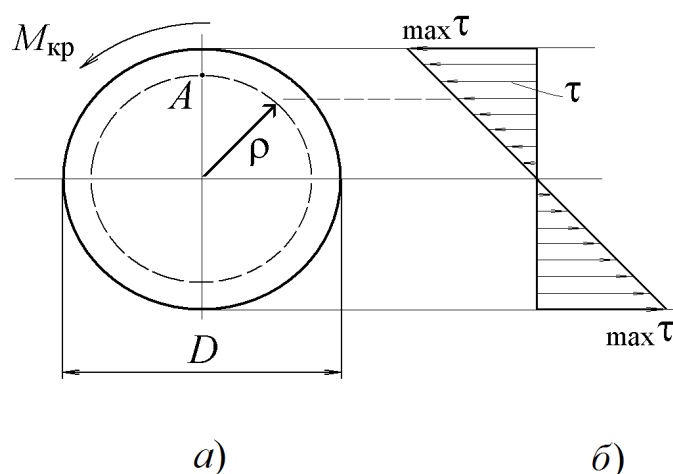


Рис. 4.1. Эпюра касательных напряжений при кручении

Величина касательных напряжений в произвольной точке сечения A с координатой ρ (рис. 4.1) рассчитывается по формуле

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_p} \rho, \quad (4.1)$$

где $0 \leq \rho \leq \frac{D}{2}$; D – внешний диаметр стержня; $M_{кр}$ – крутящий момент, который определяется по эпюре крутящих моментов; J_p – полярный момент инерции поперечного сечения, который определяется по формулам, приведенным в прил. 2. Эпюра касательных напряжений в плоскости поперечного сечения вала показана на рис. 4.1,б.

Максимальные касательные напряжения $\max \tau$ достигаются на внешнем контуре сечения (рис. 4.1) при $\rho = \frac{D}{2}$ и определяются формулой

$$\max \tau = \frac{M_{кр}}{W_p}, \quad (4.2)$$

где W_p – полярный момент сопротивления сечения (3.9).

Условие прочности записывается в виде

$$\max \tau \leq [\tau]. \quad (4.3)$$

Здесь $[\tau]$ – допускаемые касательные напряжения, которые обычно принимают равными $[\tau] = (0,5 \dots 0,7)[\sigma]$, где $[\sigma]$ – допускаемые напряжения для материала вала при растяжении (сжатии).

При кручении поперечные сечения стержня остаются плоскими, не меняют своей формы и размеров и поворачиваются на угол φ . Угол поворота φ на участке стержня определяется выражением

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G J_p}, \quad (4.4)$$

где l – длина участка, G – модуль упругости второго рода (модуль сдвига) материала стержня, который определяется экспериментально для каждого материала [1, 4]. Угол поворота φ измеряется в радианах.

Относительный угол поворота сечения определяется выражением $\theta = \frac{\varphi}{l}$ или в соответствии с (4.4) по формуле

$$\theta = \frac{M_{кр}}{G J_p}. \quad (4.5)$$

Условие жесткости для валов, работающих на кручение, записывается в виде

$$\max \theta \leq [\theta]. \quad (4.6)$$

Максимальный относительный угол поворота $\max \theta$ определяется по формуле (4.5), а допускаемый относительный угол поворота $[\theta]$ назначается в конструкторской документации из особенностей работы проектируемого изделия.

П р и м е ч а н и е. Если поперечное сечение вала не является круглым (эллиптическое, прямоугольное и др.), то гипотеза плоских сечений не выполняется, сечение деформируется и расчетные формулы (4.1)–(4.5) не применимы [1]. В этом случае расчет стержней выполняется методами теории упругости.

4.2. Расчет на прочность и жесткость трансмиссионного вала

Выполнить проектный расчет трансмиссионного вала, расчетная схема которого показана на рис. 4.2,а.

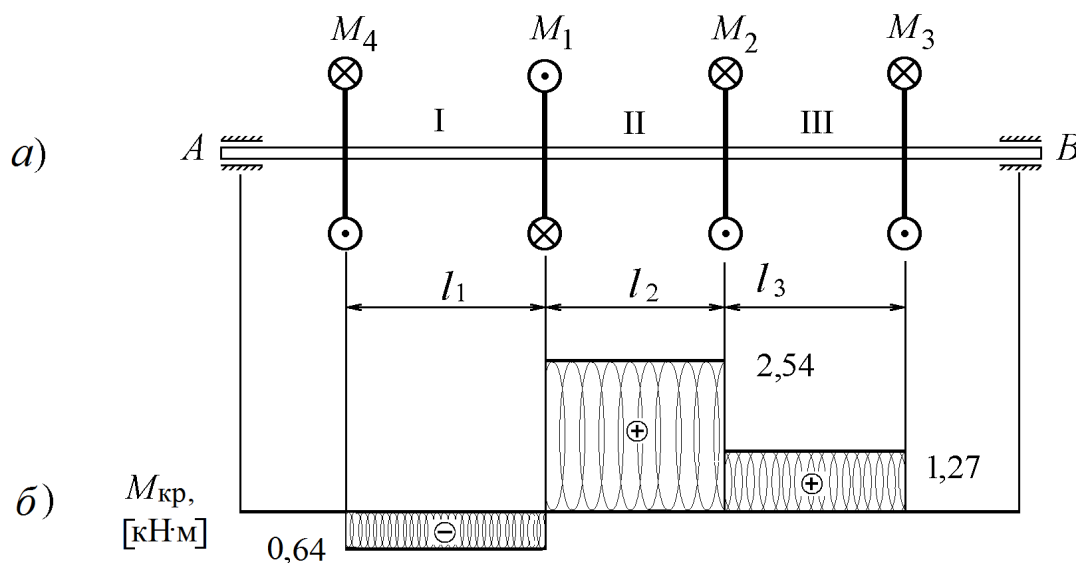


Рис. 4.2. Расчетная схема трансмиссионного вала

Исходные данные принять следующими:

$N_2 = 40$ кВт; $N_3 = 40$ кВт; $N_4 = 20$ кВт; $n = 300 \text{ мин}^{-1}$;
 $l_1 = 0,4 \text{ м}$; $l_2 = 0,6 \text{ м}$; $l_3 = 1,0 \text{ м}$. Трение в подшипниковых опорах А и В отсутствует.

Материал вала – сталь с модулем сдвига $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

Допускаемые касательные напряжения $[\tau] = 40$ МПа, относительный угол закручивания $[\theta] = 0,4$ град/м.

Решение

1. Определим величину мощности, подводимой к ведущему шкиву 1. Считаем, что потери на трение в подшипниковых опорах A и B отсутствуют, т.е. $N_1 = N_2 + N_3 + N_4 = 40 + 40 + 20 = 100$ кВт.

2. Вычисляем крутящие моменты, передаваемые на трансмиссионный вал в местах расположения шкивов, используя формулу

$$M_i = 9,55 \frac{N_i}{n}, \quad (4.7)$$

где $i = 1, 2, 3, 4$ – номер шкива.

В соответствии с (4.7) получим

$$M_1 = 9,55 \frac{10}{300} = 3,18 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_2 = M_3 = 9,55 \frac{4}{300} = 1,27 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = 9,55 \frac{2}{300} = 0,64 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3. Используя метод сечений на каждом из трех участков I, II и III (рис. 4.2,а), получим значения крутящих моментов на этих участках:

$$M_{\text{крI}} = -M_4 = -0,64 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\text{крII}} = -M_4 + M_1 = -0,64 + 3,18 = 2,54 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\text{крIII}} = -M_4 + M_1 - M_2 = -0,64 + 3,18 - 1,27 = 1,27 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На рис. 4.2,б показана эпюра крутящих моментов, построенная по полученным результатам.

4. Определяем положение наиболее нагруженного сечения вала. Из эпюры крутящих моментов следует, что наиболее нагруженным для вала постоянного поперечного сечения являются сечения, расположенные на II участке, где крутящий момент достигает максимального значения

$$\max M_{\text{кр}} = M_{\text{крII}} = 2,54 \text{ кН}\cdot\text{м} = 2,54 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{мм}.$$

Принимая полярный момент сопротивления для вала равным

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}, \text{ запишем условие прочности (4.3) в виде}$$

$$\max \tau = \frac{\max M_{\text{кр}}}{W_p} = 16 \frac{\max M_{\text{кр}}}{\pi D^3} \leq [\tau]. \quad (4.8)$$

Из соотношения (4.8) получим, что диаметр вала должен определяться из условия

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \max M_{\text{кр}}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,54 \cdot 10^6}{\pi 40}} = 68 \text{ мм.}$$

Таким образом, из расчета на прочность следует, что трансмиссионный вал должен иметь диаметр $D \geq 31,9$ мм.

5. Проверим выполнение условия жесткости (4.6) для трансмиссионного вала. Для этого определим допускаемый относительный угол закручивания $[\theta]$ в рад/мм

$$[\theta] = \frac{0,4^\circ \pi}{180^\circ} = 6,98 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м} = 6,98 \cdot 10^{-6} \text{ рад/мм.}$$

Учитывая, что полярный момент инерции вала $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$, из условия жесткости (4.6) получим

$$\max \theta = \frac{\max M_{\text{кр}}}{GJ_p} = \frac{32 \max M_{\text{кр}}}{G\pi D^4} \leq [\theta]. \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует, что вал должен иметь диаметр, удовлетворяющий соотношению

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \max M_{\text{кр}}}{G\pi [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2,54 \cdot 10^6}{\pi 0,8 \cdot 10^5 \cdot 6,98 \cdot 10^{-6}}} = 82 \text{ мм.}$$

Таким образом, из условия жесткости следует, что $D \geq 82$ мм.

6. Сопоставляя результаты расчета на прочность и жесткость, получим, что должно выполняться условие $D \geq 82$ мм. Округляя это значение диаметра до ближайшего большего четного числа, окончательно принимаем диаметр трансмиссионного вала $D = 82$ мм.

П р и м е ч а н и е. Если вал имеет кольцевое поперечное сечение с внешним и внутренним диаметрами D и d соответственно, то проектный расчет выполняется аналогично. При этом моменты сопротивления

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4); \quad J_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) \quad (\text{см. прил. 2}). \quad \text{Здесь безразмерный параметр } \alpha = \frac{d}{D}$$

назначается из конструктивных соображений. Рекомендуется принимать в практических расчетах $\alpha = 0,6 \dots 0,8$.

4.3. Расчет на прочность статически неопределимого вала

Если вал является статически неопределимым, то по аналогии со статически неопределимыми задачами на растяжение и сжатие (см. пример 2.6.2 из п. 2.6) для расчета на прочность такого вала кроме уравнений равновесия необходимо составить уравнение совместности деформаций. Это уравнение записывается для основной (статически определимой и геометрически неизменяемой) системы, которая получается из заданной путем отбрасывания «лишней» связи. Далее расчет выполняется для основной системы аналогично п. 4.2.

Подробно расчет статически неопределимых валов рассмотрен в пособии [6].

4.4. Особенности расчета валов некруглого поперечного сечения

Задача о кручении валов некруглого поперечного сечения не может быть решена элементарными методами, так как гипотеза о плоских сечениях для них не выполняется. Поперечные сечения вала не остаются плоскими, т.е. они деформируются и искривляются. В этом случае задача решается методами теории упругости [1]. Приведем результаты решения задач для некоторых часто встречающихся сечений валов, имеющих некруглое поперечное сечение.

На рис. 4.3 приведены эпюры распределения касательных напряжений в валах прямоугольного (рис. 4.3,а) и эллиптического (рис. 4.3,б) поперечных сечений при действии крутящего момента.

Анализ эпюр распределения касательных напряжений для прямоугольного сечения показывает, что в центре сечения и в его угловых точках касательные напряжения равны нулю. Максимальных значений касательные напряжения достигают на серединах длинных сторон прямоугольника ($a > b$) в точке А.

Величина максимальных касательных напряжений определяется по формуле

$$\max \tau = \frac{M_{кр}}{\alpha ab^2}, \quad (4.10)$$

где α – коэффициент, зависящий от отношения сторон a/b ; a и b – длины сторон прямоугольного сечения (считаем, что $a > b$).

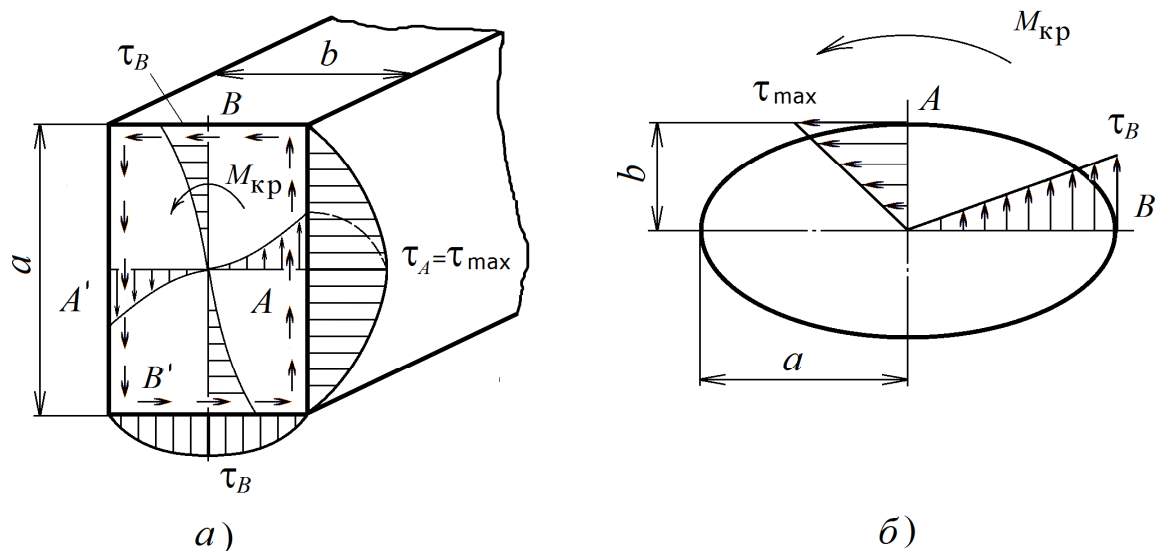


Рис. 4.3. Распределение касательных напряжений при кручении валов некруглого сечения

Касательные напряжения в точках B (на серединах коротких сторон, см. рис. 4.3,а) вычисляются по формуле

$$\tau_B = \eta(\max \tau), \quad (4.11)$$

а угловое перемещение (поворот в радианах поперечного сечения вала) определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{\beta G a b^3}. \quad (4.12)$$

Здесь коэффициенты η и β также зависят от отношения сторон сечения $\alpha = a/b$. Значения коэффициентов α , β , η в зависимости от отношения длин сторон (a/b) приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Значение коэффициентов α , β , η для прямоугольного сечения

a/b	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
η	1,0	0,859	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

Для вала с эллиптическим сечением (рис. 4.3,б) с полуосями a и b (считаем, что $a > b$) наибольшие касательные напряжения имеют место на внешнем контуре сечения на концах короткой полуоси (в т. A , см. рис. 4.3,б):

$$\max \tau = \tau_A = \frac{2M_{\text{кр}}}{\pi ab^2}. \quad (4.13)$$

Касательные напряжения в т. B (на конце короткой полуоси) определяются по формуле

$$\tau_B = \frac{2M_{\text{кр}}}{\pi ba^2}, \quad (4.14)$$

а угловое перемещение вала определяется выражением

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}}(a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3}. \quad (4.15)$$

Для других видов некруглых поперечных сечений вала расчетные формулы приведены в [3]. Порядок расчета на прочность и жесткость валов, имеющих некруглое поперечное сечение, аналогичен п. 4.2.

Контрольные вопросы

1. Какой вид нагружения называется кручением?
2. Сформулируйте правила знаков для построения эпюры крутящего момента.
3. Запишите формулу для расчета касательного напряжения при кручении.
4. Постройте эпюру касательных напряжений в поперечном сечении вала.
5. Запишите условие прочности при кручении.
6. Запишите формулу для определения угла поворота поперечного сечения вала.
7. Запишите формулу для вычисления относительного угла закручивания вала.
8. Запишите условие жесткости при кручении.
9. Запишите формулы для вычисления полярного момента сопротивления для круглого и кольцевого поперечных сечений.
10. Сформулируйте порядок выполнения проектного расчета вала при кручении.
11. Какие особенности имеют место при кручении валов некруглого поперечного сечения?

5. Изгиб прямых стержней

5.1. Основные соотношения

Стержни, работающие на изгиб, называются балками.

При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают два внутренних силовых фактора: поперечная (перерезывающая) сила Q_y и изгибающий момент M_x (рис. 5.1).

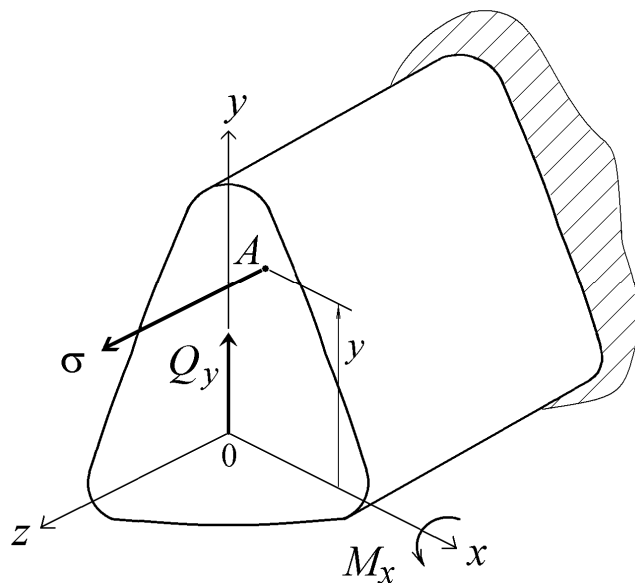


Рис. 5.1. Произвольное поперечное сечение балки

Оси x и y в поперечном сечении являются главными центральными. Эпюры внутренних силовых факторов строят методом сечений для каждого участка балки. При этом применяют следующие правила знаков.

Правила знаков: поперечная сила Q_y считается положительной, если внешняя сила поворачивает отсеченную часть балки по часовой стрелке относительно сечения (рис. 5.2,а); изгибающий момент M_x считается положительным, если сжаты верхние волокна балки (рис. 5.2,б).

При решении задач на изгиб необходимо построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x на каждом участке балки методом сечений с использованием правил знаков. Эпюра Q_y является вспомогательной и строится первой. Эпюра M_x является основной и строится после эпюры Q_y .

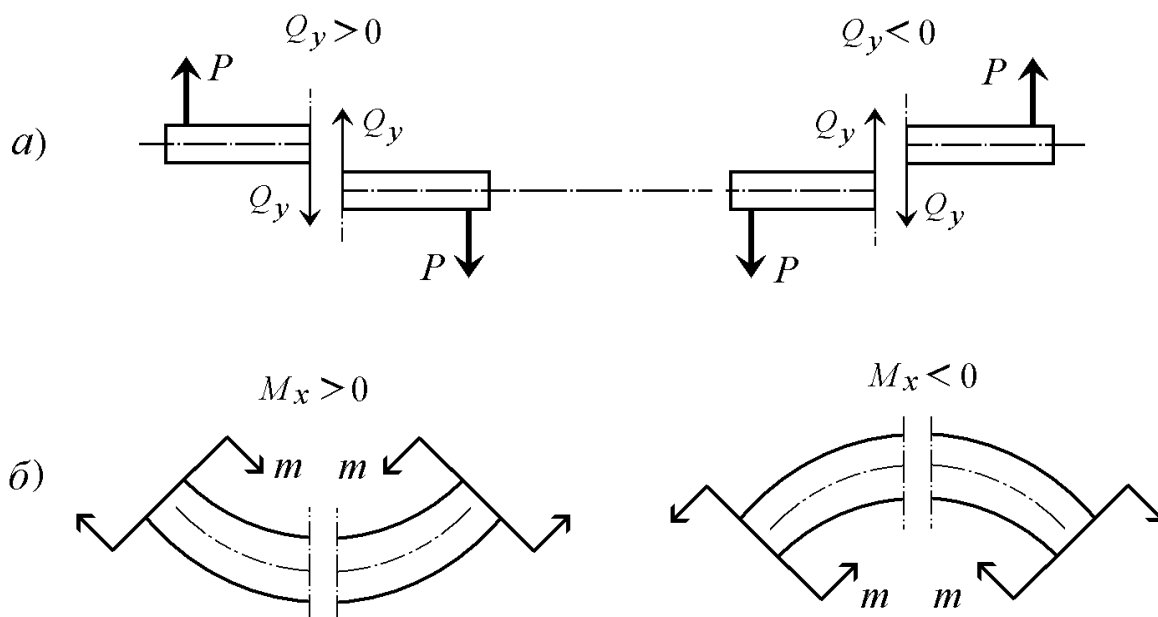


Рис. 5.2. Правило знаков:
а – для Q_y ; б – для M_x

Эпюры Q_y и M_x имеют следующие основные свойства [1, 2]:

1. На участках балки, где отсутствует внешняя нагрузка, эпюра Q_y является постоянной, а эпюра M_x – линейной функцией продольной координаты балки Z .

2. На участках балки, где действует постоянная распределенная нагрузка интенсивностью q , эпюра Q_y является линейной функцией, а эпюра M_x – квадратичной функцией (параболой) продольной координаты Z . При этом парабола направлена выпуклостью навстречу действующей нагрузке интенсивностью q .

В сечениях балки, где $Q_y = 0$, на эпюре M_x имеет место экстремум (максимум или минимум).

3. В поперечном сечении балки, где действует сосредоточенная сила, на эпюре Q_y имеет место скачок, по величине и направлению совпадающий с действующей силой.

4. В поперечном сечении балки, где действует сосредоточенный изгибающий момент на эпюре M_x имеет место скачок, по величине и направлению совпадающий с действующим сосредоточенным моментом.

Указанные свойства эпюр позволяют контролировать правильность их построения и решение задачи по расчету балки на изгиб.

Под действием изгибающего момента M_x в произвольном волокне A (см. рис. 5.1), расположенном на расстоянии y от оси x , возникают нормальные напряжения σ , которые определяются по формуле

где J_y – момент инерции поперечного сечения.

Figure 1.1 consists of three diagrams labeled a), б), and в).
 Diagram a) shows a cross-section of a beam with a trapezoidal shape. The top width is b . The height from the top edge to the neutral axis is y_p . The height from the neutral axis to the bottom edge is $y_{сж}$. The total height is y . The top edge is labeled K_1 and the bottom edge is labeled K_2 . The origin 0 is at the bottom center. A horizontal line with arrows pointing up represents the shear stress τ . The area above the neutral axis is shaded with diagonal lines and labeled ω .
 Diagram б) shows the stress distribution. The top part is shaded with diagonal lines and labeled $\oplus$, with a maximum stress $\max \sigma_p$. The bottom part is shaded with horizontal lines and labeled $\ominus$, with a maximum stress $\max \sigma_{сж}$.
 Diagram в) shows the shear stress distribution. The top part is shaded with diagonal lines and labeled $\oplus$, with a maximum shear stress $\max \tau$. The bottom part is shaded with horizontal lines and labeled $\ominus$, with a maximum shear stress $\max \tau$.
 Below the diagrams are the labels: а) эпюра σ , б) эпюра τ , в) эпюра τ .

5.2. Расчет на прочность

Нормальные напряжения в этих точках в соответствии с (5.1) определяются выражениями

$$\max \sigma_p = \frac{M_x}{J_x} y_p; \max \sigma_{сж} = \frac{M_x}{J_x} y_{сж}. \quad (5.2)$$

В тех случаях, когда сечение является симметричным относительно оси x , максимальные напряжения вычисляются по формуле

$$\max \sigma = \frac{M_x}{W_x}, \quad (5.3)$$

где W_x – момент сопротивления поперечного сечения.

Для балок из пластичных материалов записывается одно условие прочности (2.14), которое с учетом (5.3) имеет вид

$$\max \sigma = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (5.4)$$

Для балок из хрупких материалов записывают два условия прочности (2.17), которые с учетом (5.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \max \sigma_p &= \frac{M_x}{J_x} y_p \leq [\sigma_p], \\ \max \sigma_{сж} &= \frac{M_x}{J_x} y_{сж} \leq [\sigma_{сж}]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Под действием перерезывающей силы Q_y в поперечном сечении на уровне y (рис. 5.3,а) действуют касательные напряжения τ , которые вычисляются по формуле Д. И. Журавского [1, 2]

$$\tau = \frac{Q_y S_x^\omega}{J_x b}. \quad (5.6)$$

Здесь S_x^ω – статический момент части площади сечения ω , расположенной выше уровня y (см. рис. 5.3,а); b – ширина сечения на уровне y .

Эпюра касательных напряжений τ по высоте сечения является квадратичной параболой и показана на рис. 5.3,в. Максимальные касательные напряжения имеют место в центре тяжести поперечного сечения и равны

$$\max \tau = \frac{\max Q_y S_x^{F_1}}{J_x b}, \quad (5.7)$$

где $S_x^{F_1}$ – статический момент части площади сечения F_1 , лежащий выше оси x (рис. 5.3,а).

Условие прочности по касательным напряжениям записывается в виде [1]

$$\max \tau = \frac{\max Q_y S_x^F}{J_x b} \leq [\tau], \quad (5.8)$$

где $\max Q_y$ – максимальная поперечная сила, которая определяется по эпюре Q_y ; $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение для материала балки.

П р и м е ч а н и е. При практических расчетах большинства реальных балочных конструкций максимальные касательные напряжения $\max \tau$ являются малыми и условие прочности (5.8) выполняется. В связи с этим при проведении расчетов балок на прочность достаточно требовать выполнение условий прочности по нормальным напряжениям (5.4) или (5.5).

5.3. Определение перемещений

При поперечном изгибе балки ее деформации характеризуются прогибом $y(z)$ и углом поворота поперечного сечения $\theta(z)$, которые являются функциями координаты z , характеризующей положение произвольного сечения (рис. 5.4).

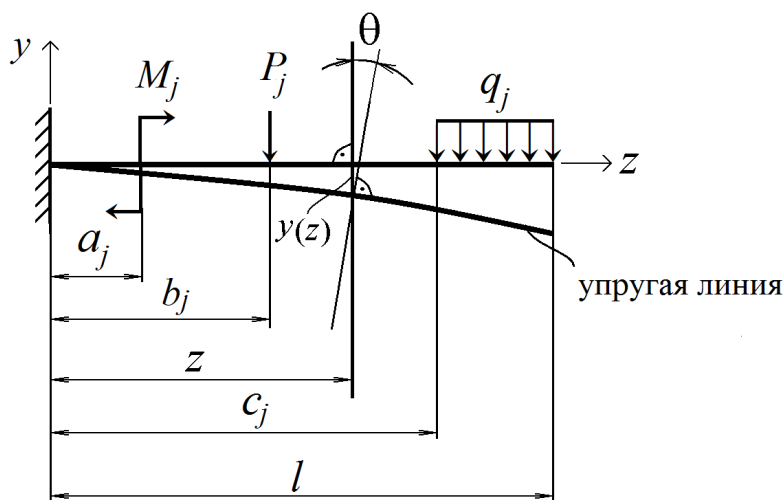


Рис. 5.4. Положение произвольного сечения

Прогиб, угол поворота и изгибающий момент связаны между собой дифференциальными соотношениями

$$\theta = \frac{dy}{dz}; \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (5.9)$$

Изогнутая ось балки называется упругой линией. Прогибы и углы поворота могут определяться различными способами [1, 2]: прямым интегрированием дифференциальных соотношений (5.9), с помощью интеграла Максвелла – Мора, способом Верещагина и др.

Если балка имеет постоянное поперечное сечение по длине, т.е. $(EJ_x) = \text{const}$, то прогибы и углы поворота можно определять универсальным методом начальных параметров, в соответствии с которым выражения для них записываются в виде [1, 2]

$$y(z) = y_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ_x} \times \left[\sum_j \left| \begin{array}{l} z > a_j \end{array} \right| \frac{M_j (z - a_j)^2}{2!} + \sum_j \left| \begin{array}{l} z > b_j \end{array} \right| \frac{P_j (z - b_j)^3}{3!} + \sum_j \left| \begin{array}{l} z > c_j \end{array} \right| \frac{q_j (z - c_j)^4}{4!} \right]; \quad (5.10)$$

$$\theta(z) = \frac{dy}{dz} = \theta_0 + \frac{1}{EJ_x} \times \left[\sum_j \left| \begin{array}{l} z > a_j \end{array} \right| \frac{M_j (z - a_j)}{1!} + \sum_j \left| \begin{array}{l} z > b_j \end{array} \right| \frac{P_j (z - b_j)^2}{2!} + \sum_j \left| \begin{array}{l} z > c_j \end{array} \right| \frac{q_j (z - c_j)^3}{3!} \right]. \quad (5.11)$$

Уравнения (5.10) и (5.11) записаны для правой системы координат, начало которой следует располагать в крайнем левом сечении балки (см. рис. 5.4).

Суммирование в формулах (5.10) и (5.11) производится по всем внешним нагрузкам, количество которых характеризуется индексом $j = 1, 2, 3, \dots$

В формулах (5.10) и (5.11) введены следующие обозначения: a_j – расстояние от начала координат до изгибающего момента M_j ; b_j – расстояние от начала координат до внешнего усилия P_j ; c_j – расстояние от начала координат до начала действия распределенной нагрузки интенсивностью q_j ; z – расстояние до сечения балки, в котором определяется прогиб или угол поворота; разделительная черта $|_{z > a_j}$ указывает на то, что соответствующая нагрузка учитывается в уравнении только при выполнении условия $z > a_j$

(аналогично для $z > b_j$ и $z > c_j$); y_0 и θ_0 – начальные параметры (прогиб балки и угол поворота поперечного сечения в начале координат), значения которых определяются из граничных условий, т.е. из условий закрепления балки.

При расчете внешние нагрузки и опорные реакции в уравнениях (5.10) и (5.11) подставляются с учетом правила знаков для изгибающих моментов: если действующая нагрузка вызывает сжатие верхних волокон балки, то она подставляется со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус.

Прогиб считается положительным ($y > 0$), если сечение балки перемещается вверх, а угол поворота $\theta > 0$, если сечение поворачивается против часовой стрелки.

Вычисляя по формулам (5.10) и (5.11) прогибы и углы поворота для сечений с различными координатами z , строят упругую линию балки и вычисляют максимальный прогиб $\max y$.

Если из конструктивных соображений прогиб балки должен быть ограничен, то дополнительно к условиям прочности (5.4) или (5.5) необходимо потребовать выполнение условия жесткости

$$\max y \leq [f]. \quad (5.12)$$

Здесь $[f]$ – допускаемый прогиб, величина которого устанавливается исходя из конструктивных особенностей и условий эксплуатации балки.

П р и м е ч а н и е. Углы поворота поперечных сечений балки $\theta(t)$ вычисляются в радианах.

5.4. Рекомендации по проектированию балок, работающих на изгиб

Наиболее рациональными следует считать балки, имеющие поперечные сечения, обеспечивающие минимальный вес балки при выполнении условий прочности.

Из анализа эпюр распределения нормальных напряжений можно сформулировать следующие рекомендации по выбору рациональных поперечных сечений для балок, работающих на изгиб:

1. **Для балок из пластичных материалов** рекомендуется выбирать симметричные (относительно оси x) сечения, ослабленные в центральной части (кольцевое сечение, двутавр, швеллер и т.п.). Это связано с тем, что для пластичных материалов допускаемые напряжения на растяжения и сжатие одинаковы, т.е.

$[\sigma_p] = [\sigma_{сж}] = [\sigma]$. На рис. 5.5 показаны некоторые рациональные виды поперечных сечений.

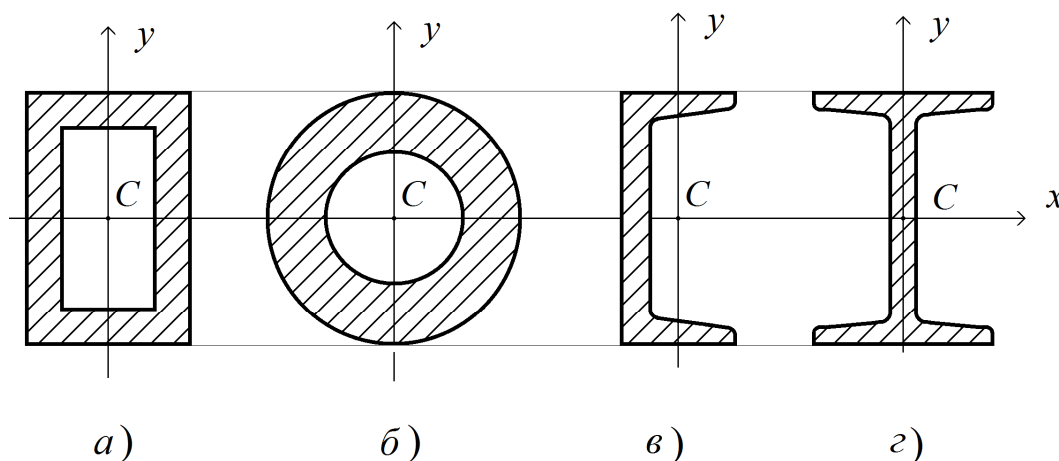


Рис. 5.5. Рациональные формы поперечных сечений для балок из пластичных материалов:

a – ослабленное прямоугольное; *б* – кольцевое;
в – швеллер; *г* – двутавр

2. Для балок из хрупких материалов рекомендуется выбирать несимметричные сечения (относительно оси x), у которых расстояние до наиболее удаленных сжатых волокон больше, чем расстояние до наиболее удаленных растянутых волокон (рис. 5.3,*a*): $y_{сж} > y_p$. Это связано с тем, что для хрупких материалов $[\sigma_{сж}] > [\sigma_p]$. На рис. 5.6 для балки из хрупкого материала показан пример рационального (рис. 5.6,*б*) и нерационального (рис. 5.6,*a*) расположения поперечного сечения.

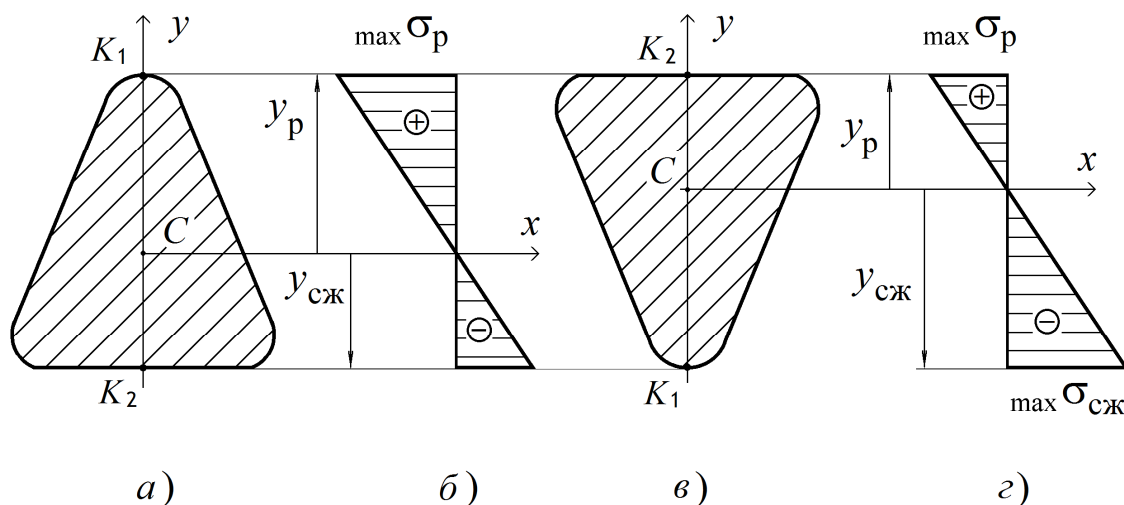


Рис. 5.6. Выбор рационального расположения сечения балки из хрупкого материала

Наиболее оптимальными следует считать поперечные сечения, у которых выполняется соотношение

$$\frac{y_{сж}}{y_p} = \frac{[\sigma_{сж}]}{[\sigma_p]}. \quad (5.13)$$

Для уменьшения веса балки поперечное сечение также рекомендуется ослабить в зоне его центра тяжести C , например, за счет отверстия или боковых выборок.

5.5. Пример расчета стальной балки на прочность

Для стальной балки, нагруженной в соответствии с расчетной схемой, представленной на рис. 5.7,а, из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать размеры поперечного сечения.

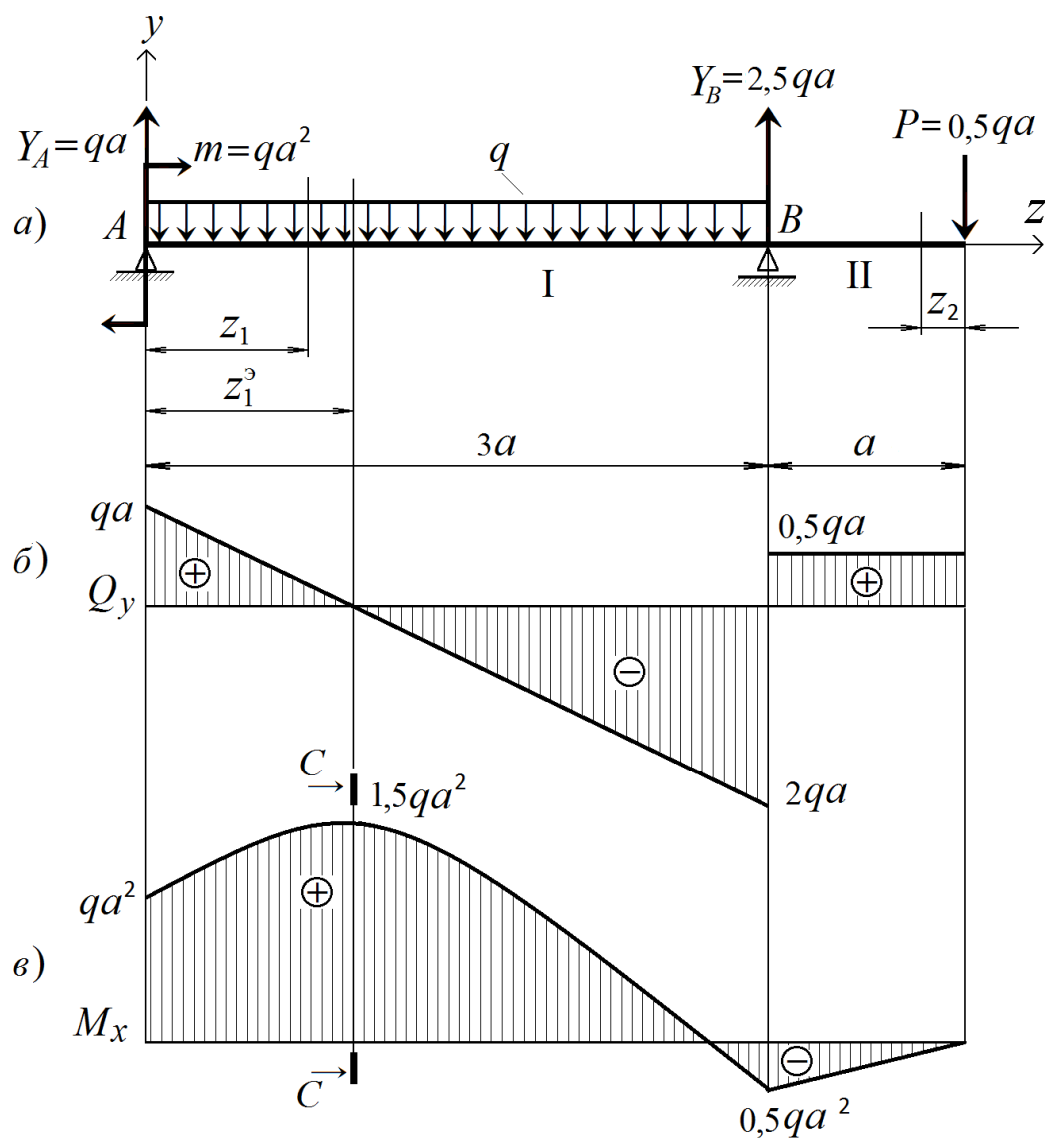


Рис. 5.7. Расчетная схема балки

Расчет выполнить для четырех вариантов поперечного сечения:

- двутавр;
- прямоугольное с соотношением сторон $h/b = 2$ (h – высота, b – ширина сечения);
- круглое сплошное с внешним диаметром D ;
- кольцевое с соотношением диаметров $c = d/D = 0,7$ (D – наружный, d – внутренний диаметры).

Выбрать наиболее рациональное поперечное сечение и для него построить эпюры нормальных и касательных напряжений в опасных поперечных сечениях балки.

Исходные данные: $q = 20 \text{ кН/м} = 20 \text{ Н/мм}$; $m = 0,5qa^2 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м} = 10^7 \text{ Н}\cdot\text{мм}$; $P = 0,5qa = 10 \text{ кН} = 10^4 \text{ Н}$; $a = 1 \text{ м} = 1000 \text{ мм}$.

Материал балки – Сталь 20 с пределом текучести $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ и модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Коэффициент запаса прочности принимаем равным $n_T = 1,5$.

Решение

1. Определяем опорные реакции Y_A и Y_B из уравнений равновесия:

$$\sum \text{mom}_A = 0; \quad -m - q \cdot 3a \frac{3a}{2} + Y_B \cdot 3a - P \cdot 4a = 0;$$

$$Y_B = \frac{m + 4,5qa^2 + P \cdot 4a}{3a} = \frac{qa^2 + 4,5qa^2 + 0,5qa \cdot 4a}{3a} = 2,5qa;$$

$$\sum \text{mom}_B = 0; \quad -m - Y_A \cdot 3a + q \cdot 3a \frac{3a}{2} - Pa = 0;$$

$$Y_A = \frac{-m + 4,5qa^2 - P \cdot 4a}{3a} = \frac{-qa^2 + 4,5qa^2 - 0,5qa \cdot a}{3a} = qa.$$

Проверка правильности определения опорных реакций проводится по уравнению равновесия

$$\sum Y = 0; \quad Y_A - q \cdot 3a + Y_B - P = 0;$$

$$qa - 3qa + 2,5qa - 0,5qa = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

Тождество показывает, что опорные реакции найдены верно. Положительные значения Y_A и Y_B показывают, что направления опорных реакций соответствуют принятым на рис. 5.7,а.

2. Строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x . Балку разбиваем на участки I и II. Используя метод сечений, для произвольного сечения каждого участка составляем урав-

нения для определения внутренних усилий Q_y и M_x , в соответствии с которыми они изменяются в пределах каждого участка. Положение сечения определяется текущей координатой z , начало отсчета удобно совмещать с началом участка (см. рис. 5.7,а).

Рассмотрим поочередно оба участка, используя введенные правила знаков для Q_y и M_x .

I участок: $0 \leq z_1 \leq 3a$.

Уравнение для поперечной силы в произвольном сечении с координатой z_1 имеет вид

$$Q_y = Y_A - qz_1;$$

$$Q_y = qa - qz_1 = q(a - z_1).$$

Выражение для Q_y является линейной функцией координаты z_1 , т.е. для построения эпюры достаточно вычислить значения Q_y в начале ($z_1 = 0$) и в конце ($z_1 = 3a$) I участка балки:

- при $z_1 = 0$: $Q_y = qa$;
- при $z_1 = 3a$: $Q_y = -2qa$.

Эпюра Q_y показана на рис. 5.7,б.

Уравнение изгибающего момента M_x в произвольном сечении участка I имеет вид

$$M_x = m + Y_A z_1 - \frac{1}{2} q z_1^2,$$

$$M_x = q a^2 + q a z_1 - \frac{1}{2} q z_1^2 = q(a^2 + a z_1 - \frac{1}{2} z_1^2).$$

Получили уравнение кривой второго порядка (параболы), выпуклость которой направлена вверх, кривая имеет экстремум в сечении с координатой z_1^3 , где $Q_y = 0$. Значение z_1^3 получим, приравняв нулю выражение для Q_y на I участке, т.е.

$$q(a - z_1^3) = 0,$$

откуда $z_1^3 = a$.

Построить кривую второго порядка можно по трем точкам.

Вычислим значения M_x в начале участка ($z_1 = 0$), в сечении экстремума M_x ($z_1 = a$) и в конце участка ($z_1 = 3a$):

- при $z_1 = 0$: $M_x = qa^2$;

$$\begin{aligned}
- \text{ при } z_1 = z_1^3 = a: \quad M_x &= q \left(a^2 + aa - \frac{1}{2} a^2 \right) = 1,5qa^2; \\
- \text{ при } z_1 = 3a: \quad M_x &= q \left[a^2 + a3a - \frac{1}{2} (3a^2) \right] = -0,5qa^2.
\end{aligned}$$

Эпюра M_x показана на рис. 5.7,в.

II участок: $0 \leq z_2 \leq a$.

Рассматривая правую отсеченную часть балки, получим

$$Q_y = P = 0,5qa.$$

График этой функции – прямая, параллельная оси отсчета z (см. рис. 5.7,б).

Изгибающий момент M_x в произвольном сечении участка II с координатой z_2 определяется выражением

$$M_x = -Pz_2 = -\frac{1}{2} qaz_2.$$

Получили уравнение наклонной прямой, которую можно построить, вычислив значения изгибающего момента в начале ($z_2 = 0$) и в конце ($z_2 = a$) участка:

$$\begin{aligned}
- \text{ при } z_2 = 0: \quad M_x &= 0; \\
- \text{ при } z_2 = a: \quad M_x &= -0,5qa.
\end{aligned}$$

Эпюра M_x показана на рисунке 5.7,в.

Определяем размеры поперечного сечения балки. Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид (5.3)

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} \leq [\sigma], \quad (5.14)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение, которое для пластичного материала равно

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа};$$

W_x – момент сопротивления поперечного сечения.

По эпюре M_x (см. рис. 5.7,в) находим наиболее нагруженное сечение балки С.

$$\text{В этом сечении } M_x = \max M_x = 1,5qa^2,$$

$$\max M_x = 1,5 \cdot 20 \cdot 1^2 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м} = 30 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{мм}.$$

Из формулы (5.14) находим требуемое значение момента сопротивления для поперечного сечения любой формы

$$W_x \geq \frac{\max M_x}{[\sigma]},$$

т.е. $W_x \geq \frac{30 \cdot 10^6}{160} = 1,875 \cdot 10^5 \text{ мм}^3 = 187,5 \text{ см}^3.$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 20 с моментом сопротивления $W_x = 184 \text{ см}^3$ (прил. 3).

Проверим прочность балки по нормальным напряжениям:

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} = \frac{30 \cdot 10^6}{184 \cdot 10^3} = 163 \text{ МПа} > [\sigma].$$

Превышение $\max \sigma$ над допускаемым напряжением составляет

$$\Delta \sigma = \frac{\max \sigma - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{163 - 160}{160} \cdot 100 \% = 2 \%.$$

Превышение напряжения допускается не более 5 %, поэтому окончательно выбираем двутавр № 20. Площадь его поперечного сечения $F = 26,8 \text{ см}^2$.

Определим размеры прямоугольного сечения, для которого момент сопротивления (прил. 2) при $h = 2b$ определяется выражением

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3.$$

Из условия $W_x \geq 187,5 \text{ см}^3$ получим

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 187,5}{2}} = 6,55 \text{ см}.$$

Принимая окончательно $b = 6,6 \text{ см}$, получим высоту $h = 2b = 13,2 \text{ см}$, а площадь поперечного сечения составляет $F = bh = 6,6 \cdot 13,2 = 87,12 \text{ см}^2$.

Определим требуемый диаметр сплошного круглого поперечного сечения из условия

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} \geq 187,5 \text{ см}^3.$$

Получим $D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 187,5}{\pi}} = 12,40 \text{ см} = 124 \text{ мм}.$

Окончательно принимаем $D = 12,4$ см, тогда площадь поперечного сечения будет равна $F = \frac{1}{4}\pi D^2 = \frac{1}{4}\pi 12,4^2 = 120,7 \text{ см}^2$.

Рассмотрим поперечное сечение балки в форме кольца с параметрами $\alpha = d/D = 0,7$.

В этом случае момент сопротивления равен (прил. 2)

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^3}{32}(1 - 0,7^4) = 0,075 D^3.$$

Удовлетворяя условию прочности получим, что $W_x = 0,075 D^3 \geq 187,5 \text{ см}^3$.

$$\text{Внешний диаметр } D \geq \sqrt[3]{\frac{1,875}{0,075}} = 13,58 \text{ см.}$$

Окончательно принимаем $D = 13,6$ см, тогда внутренний диаметр сечения $d = \alpha D = 0,7 \cdot 13,6 = 9,52$ см. Площадь поперечного сечения в этом случае составляет

$$F = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2) = \frac{\pi 13,6^2}{4}(1 - 0,7^2) = 74,1 \text{ см}^2.$$

Наиболее рациональным считается поперечное сечение балки, при котором вес балки будет минимальным. Так как во всех четырех случаях рассматриваемых сечений общая длина балки и материал, из которого она изготовлена, не меняется, то вес каждой балки будет пропорционален площади ее поперечного сечения. В табл. 5.1 приведены площади сечений для всех рассмотренных вариантов балок. Максимальную площадь сечения имеет балка круглого поперечного сечения $F_{\max} = F_3$.

Таблица 5.1

Выбор рационального сечения

Вид сечения	Двутавр	Прямоугольник	Круг	Кольцо
Номер сечения j	1	2	3	4
$F_j, \text{ см}^2$	26,8	87,12	120,7	74,1
$F_j / F_{\max}$	0,22	0,72	1	0,61

Анализ полученных результатов (см. табл. 5.1) показывает, что минимальный вес имеет балка с двутавровым поперечным сечением. При этом по сравнению с балкой круглого поперечного сечения (которая имеет максимальный вес) двутавровая балка почти в 5 раз легче при такой же прочности.

Окончательно принимаем, что наиболее рациональным для данной балки является двутавр № 20. Все дальнейшие расчеты проводим для этого сечения.

Построим эпюры нормальных σ напряжений для опасного сечения C (см. рис. 5.7).

Максимальные нормальные напряжения в сечении C (рис. 5.8,а) равны $\max \sigma = 163$ МПа.

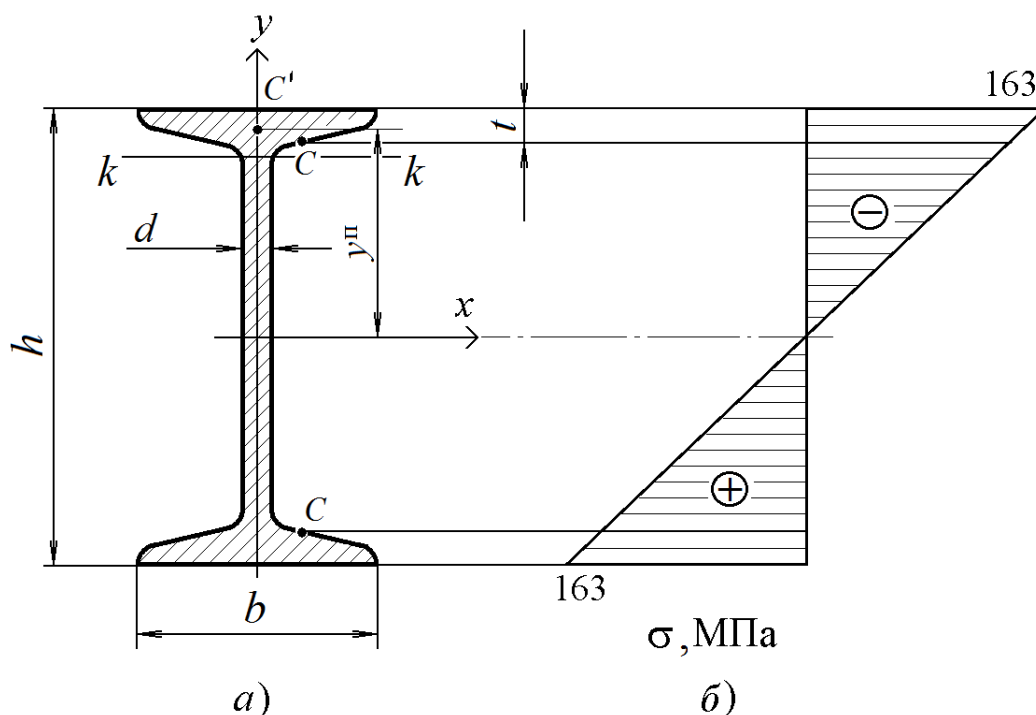


Рис. 5.8. Эпюра нормальных напряжений для сечения C

Так как верхние волокна (вв) двутавра испытывают сжатие, $\sigma_{\text{вв}} = -163$ МПа (сжатый слой верхней полки двутавра), при этом нижние волокна (нв) испытывают растягивающие напряжения: $\sigma_{\text{нв}} = +163$ МПа (растянутый слой полки двутавра).

Эпюра σ изображена на рис. 5.8,б.

Балка с двутавровым сечением № 20 удовлетворяет условию прочности при заданных внешних нагрузках.

5.6. Расчет балки на жесткость

Для стальной балки, рассмотренной в п. 5.5, определить прогибы в характерных точках и построить приближенно упругую линию (изогнутую ось балки).

Балка имеет двутавровое поперечное сечение и нагружена в соответствии с расчетной схемой, представленной на рис. 5.7,а.

В результате расчета данной балки на прочность (см. п. 3.5.3) уже известны опорные реакции Y_A и Y_B , номер двутавра, эпюры изгибающих моментов M_x (повторено на рис. 5.9, а, б).

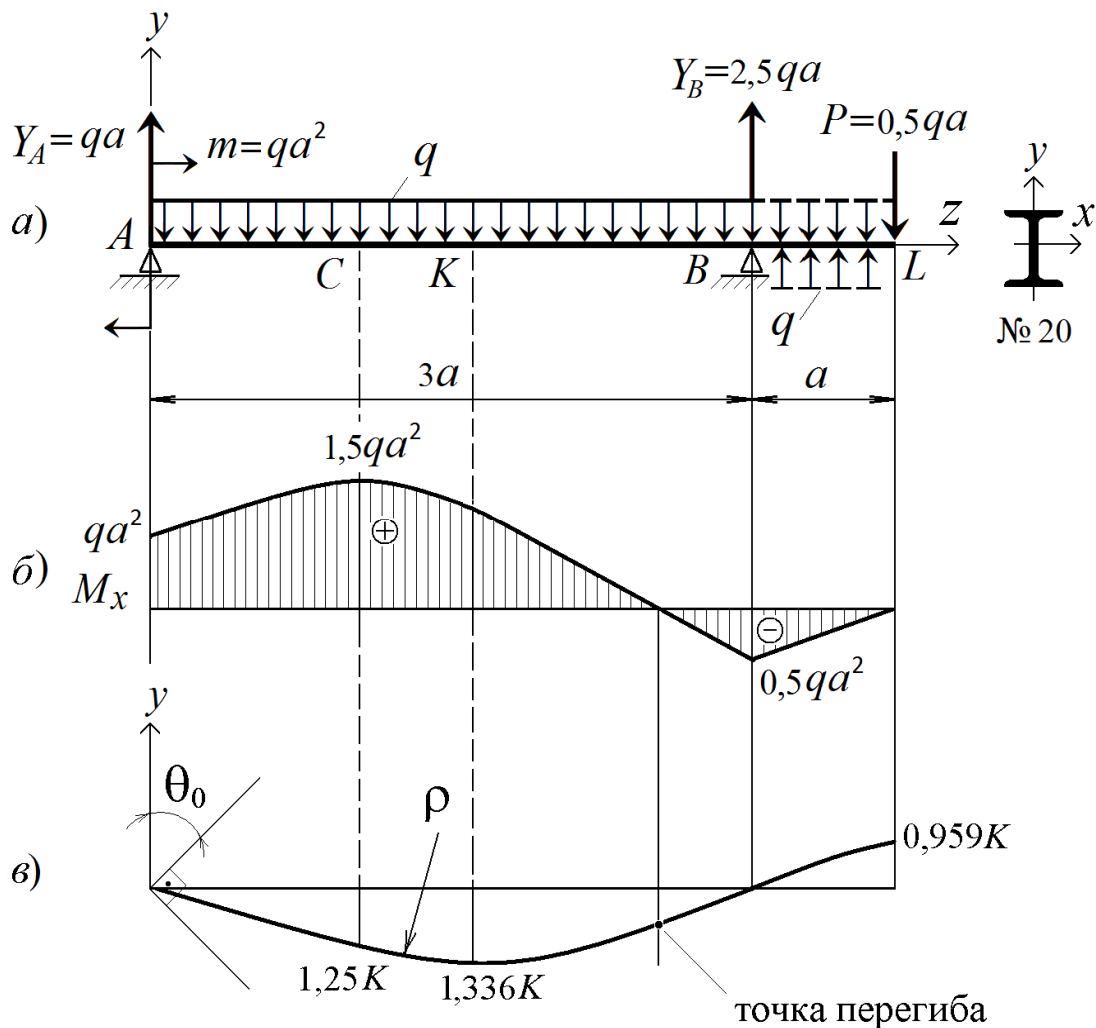


Рис. 5.9. Упругая линия балки

Решение

1. Выбираем систему координат. Начало координат совмещаем с левым торцом A , чтобы вся балка располагалась в положительном квадранте. Так как распределенная нагрузка не доходит до конца балки, то продляем ее до правого конца балки [1, 2].

Одновременно на этом участке прикладываем компенсирующую распределенную нагрузку q обратного знака (рис. 5.9, а).

2. Запишем уравнение упругой линии оси балки для данной схемы

$$EJ_x y = EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 z + m \frac{z^2}{2} \Big|_{z>0} + Y_A \frac{z^3}{6} \Big|_{z>0} + Y_B \frac{(z-3a)^3}{6} \Big|_{z>3a} -$$

$$-q \frac{z^4}{24} + q \frac{(z-3a)^4}{24} \Big|_{z>3a}. \quad (5.15)$$

Здесь y_0 и θ_0 – прогиб и угол поворота сечения в начале координат, которые определяются из условий на опорах и называются начальными параметрами; прерыватель $\Big|_{z>a_i}$ указывает, что при вычислении прогиба в конкретном сечении учитываются только те слагаемые, для которых указанное неравенство ($z > a_i$) выполняется.

3. Определяем начальные параметры y_0 и θ_0 .

При $z=0$: $y_A = 0$, т.е. $y_0 = 0$ (точка A на рис. 5.9,а), так как в начале координат расположена шарнирно-неподвижная опора балки.

При $z=3a$: $y_B = 0$ (точка B на рис. 5.9,а), так как в сечении B также расположена опора (шарнирно-подвижная).

Тогда из уравнения (5.15), приравняв правую часть нулю при $z=3a$, получим

$$0 = EJ_x \theta_0 3a + m \frac{(3a)^2}{2} + Y_A \frac{(3a)^2}{2} - q \frac{(3a)^4}{24}$$

или после подстановки значений нагрузок

$$0 = EJ_x \theta_0 3a + qa^2 \frac{(3a)^2}{2} + qa \frac{(3a)^3}{6} - q \frac{(3a)^4}{24}.$$

Решая полученное уравнение относительно θ_0 , получим

$$\theta_0 = -1,875 \frac{qa^3}{EJ_x}.$$

Знак «-» показывает, что сечение A поворачивается по часовой стрелке.

После определения начальных параметров и подстановки значений m , Y_A и Y_B уравнение (5.15) принимает вид

$$y(z) = \frac{1}{EJ_x} \left[0 - 1,875qa^3z + qa^2 \frac{z^2}{2} \Big|_{z>0} + qa \frac{z^3}{6} \Big|_{z>0} + 2,5qa \frac{(z-3a)^3}{6} \Big|_{z>3a} - \right. \\ \left. - q \frac{z^4}{24} + q \frac{(z-3a)^4}{24} \Big|_{z>3a} \right]. \quad (5.16)$$

4. Строим приближенно упругую линию оси балки, используя уравнение упругой линии (5.16).

Для этого находим прогибы в характерных сечениях данной балки:

- при $z_C = a$ (сечение, где изгибающий момент максимален);
- при $z_K = 1,5a$ (в середине пролета AB);
- при $z_L = 4a$ (на конце консоли);
- при $z_C = a$:

$$y_C = \frac{1}{EJ_x} \left[-1,875qa^3a + qa^2 \frac{a^2}{2} + qa \frac{a^3}{6} - q \frac{a^4}{24} \right] = -\frac{1,25qa^4}{EJ_x};$$

- при $z_K = 1,5a$:

$$y_K = \frac{1}{EJ_x} \left[-1,875qa^3 \cdot 1,5a + qa^2 \frac{(1,5a)^2}{2} + qa \frac{(1,5a)^3}{6} - q \frac{(1,5a)^4}{24} \right] =$$

$$= -\frac{1,336qa^4}{EJ_x};$$

- при $z_L = 4a$:

$$y_L = \frac{1}{EJ_x} \left[-1,875qa^3 \cdot 4a + qa^2 \frac{(4a)^2}{2} + qa \frac{(4a)^3}{6} + \right.$$

$$\left. + 2,5qa \frac{(4a-3a)^3}{6} - q \frac{(4a)^4}{24} + q \frac{(4a-3a)^4}{24} \right] = \frac{0,959qa^4}{EJ_x}.$$

Знак «−» указывает на то, что прогиб направлен вниз, а знак «+» – прогиб направлен вверх.

Форма упругой линии балки связана с эпюрой изгибающих моментов дифференциальным соотношением (5.9). Следовательно, на участке, где $M_x > 0$, выпуклость упругой линии направлена вниз, и, наоборот, где $M_x < 0$, выпуклость упругой линии направлена вверх.

В сечении, где $M_x = 0$, упругая линия имеет точку перегиба. Упругая линия изображена в масштабе на рис. 5.9,в.

Для удобства при построении упругой линии балки введено обозначение $K = \frac{qa^4}{EJ_x}$ (см. рис. 5.9,в).

5. Проверяем балку по условию жесткости, которое имеет вид (5.12)

$$\max y \leq [f].$$

Считая, что в силу упругих свойств материала балки сечение, в котором прогиб наибольший, расположено близко к середине пролета балки, принимаем $\max y = y_K$.

Для двутавра № 20 момент инерции равен (прил. 3)
 $J_x = 1840 \text{ см}^4 = 1,84 \cdot 10^7 \text{ мм}^4$.

Подсчитаем численное значение y_K :

$$\max y = y_K = \frac{1,336 q a^4}{E J_x} = \frac{1,336 \cdot 20 \cdot 1000^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 1,84 \cdot 10^7} = 7,26 \text{ мм}.$$

Допускаемый прогиб $[f] = 0,002 \cdot l \text{ м} = 0,002 \cdot 3 \cdot 10^3 = 6 \text{ мм}$.

Сравнение показывает, что $y_K > [f]$, т.е. условие жесткости не выполняется.

6. Подбираем сечение балки из условия жесткости, для чего выражение, определяющее $\max y$ в общем виде, подставляем в условие жесткости (5.12):

$$y_K = \frac{1,336 q a^4}{E J_x} \leq [f],$$

отсюда находим требуемое значение момента инерции сечения балки

$$J_x \geq \frac{1,336 q a^4}{E [f]} = \frac{1,336 \cdot 20 \cdot 1000^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 6} = 2,22 \cdot 10^7 \text{ мм}^4 = 2220 \text{ см}^4.$$

По значению J_x из таблиц ГОСТ 8239–89 (прил. 3) выбираем двутавр № 22, для которого $J_x = 2550 \text{ см}^4$, $W_x = 232 \text{ см}^3$.

При этом значение максимального прогиба будет равно

$$\max y = y_K = \frac{1,336 q a^4}{E J_x} = \frac{1,336 \cdot 20 \cdot 1000^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 2,55 \cdot 10^7} = 5,2 \text{ мм},$$

что удовлетворяет условию жесткости.

Так как для двутавровой балки № 22 момент сопротивления W_x выше, чем у двутавра № 20, то условие прочности выполняется, а коэффициент запаса прочности будет $n_T > 1,5$.

5.7. Расчет на прочность балки из хрупкого материала

Произвести расчет на прочность чугуновой балки (рис. 5.10,а) при $P = qa$; $m = qa^2$; $a = 1 \text{ м} = 1000 \text{ мм}$, $q = 10 \text{ кН/м} = 10 \text{ Н/мм}$.

Материал балки – чугун СЧ15-32, имеющий механические характеристики (прил. 1):

- предел прочности на растяжение $\sigma_p = 120$ МПа;
- предел прочности на сжатие $\sigma_{сж} = 650$ МПа.

Балка имеет Т-образное поперечное сечение, показанное на рис. 3.3 в п. 3.2.

Выбрать рациональное расположение поперечного сечения балки и определить прогиб сечения K на свободном конце консольной балки.

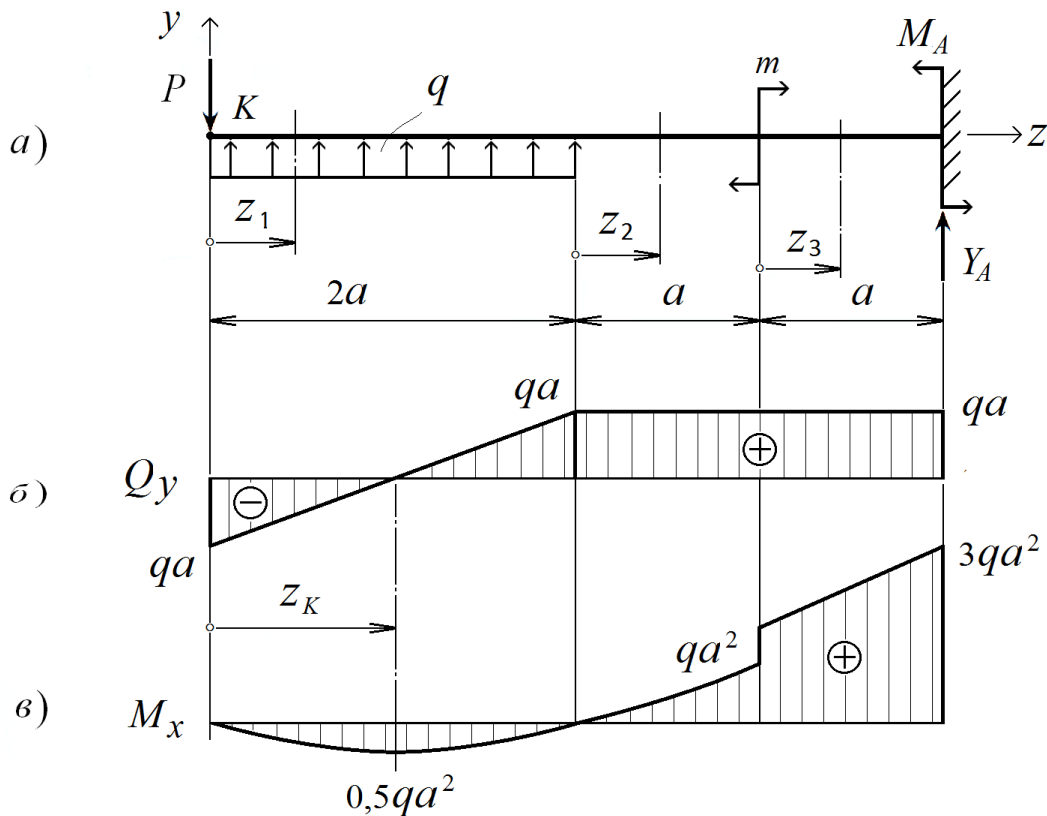


Рис. 5.10. Расчетная схема чугунной балки

Решение

1. В жестком защемлении A возникают реакция Y_A и изгибающий момент M_A . Так как балка консольная, эпюры Q_y и M_x можно построить, не определяя опорные реакции M_A и Y_A , если при применении метода сечений на каждом участке рассматривать левую отсеченную часть балки, на которую действуют известные внешние нагрузки.

I участок при $0 \leq z_1 \leq 2a$:

$$Q_y = qz_1 - P \text{ или } Q_y = qz_1 - qa = q(z_1 - a);$$

при $z_1 = 0$: $Q_y = -qa$;

при $z_1 = 2a$: $Q_y = qa$.

Имеем $M_x = -Pz_1 + (qz_1)\frac{1}{2}z_1$ или $M_x = -qaz_1 + \frac{1}{2}qz_1^2$.

Эпюра M_x является квадратичной параболой и достигает экстремума в точке с координатой z_* , где $Q_y = 0$. Таким образом, при $z_1 = z_*$ получим $Q_y = q(z_* - a) = 0$ и, следовательно, $z_* = a$ (рис. 5.10,б).

Рассчитаем значения M_x в трех точках:

– при $z_1 = 0$: $M_x = 0$;

– при $z_1 = z_* = a$: $M_x = -qa^2 + \frac{1}{2}qa^2 = -0,5qa^2$;

– при $z_1 = 2a$: $M_x = -qa \cdot 2a + \frac{1}{2}q(2a)^2 = 0$.

По расчетным значениям строим эпюры Q_y и M_x на первом участке балки.

II участок при $0 \leq z_2 \leq a$:

$Q_y = (q \cdot 2a) - P = 2qa - qa = qa$ – постоянная величина.

$M_x = (q \cdot 2a)(a + z_2) - P(2a + z_2) = 2qa(a + z_2) - qa(2a + z_2) =$
 $= qa(2a + 2z_2 - 2a - z_2) = qaz_2$.

Эпюра M_x – линейная функция от z_2 :

– при $z_2 = 0$: $M_x = 0$;

– при $z_2 = a$: $M_x = qa^2$.

III участок при $0 \leq z_3 \leq a$:

$Q_y = (q \cdot 2a) - P = qa^2$ – постоянная величина.

$M_x = (q \cdot 2a)(2a + z_3) - P(3a + z_3) + m = 2qa(2a + z_3) -$
 $- qa(3a + z_3) + qa^2 = qa(4a + 2z_3 - 3a - z_3 + a) = qa(2a + z_3)$.

Эпюра M_x – линейная функция, координаты z_3 :

– при $z_3 = 0$: $M_x = 2qa^2$;

– при $z_3 = a$: $M_x = 3qa^2$.

По найденным значениям строим эпюры Q_y (рис. 5.10,б) и M_x (рис. 5.10,в).

Из анализа эпюры M_x следует, что наиболее нагруженным является сечение A в защемлении, где изгибающий момент достигает своего максимального значения

$$\max M_x = 3qa = 3 \cdot 10 \cdot 1000^2 = 3 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

2. Поперечное сечение чугунной балки показано на рис. 5.11,а и является симметричным относительно оси y .

Центр тяжести поперечного сечения (т. C) определяется координатами $y_1 = 4,33b$ и $y_2 = 7,67b$ (см. пример в п. 3.2).

Момент инерции сечения $J_x = 492b^4$.

Так как материал балки является хрупким, то должны выполняться два условия прочности (5.5). Из анализа эпюры M_x (рис. 5.10,в) следует, что для сечения A в точках K_1 (рис. 5.11,а) возникают сжимающие, а в точках K_2 – растягивающие напряжения, т.е. $y_{сж} = y_1$, а $y_p = y_2$.

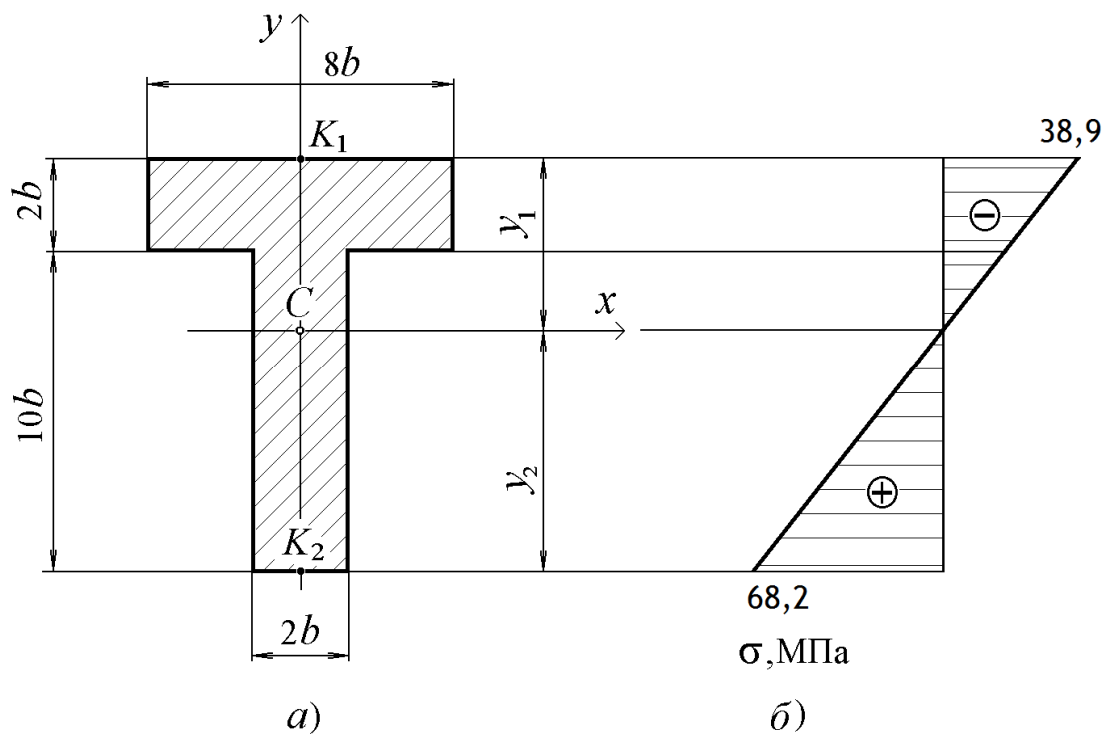


Рис. 5.11. К выбору расположения поперечного сечения

3. Выполняем проектировочный расчет.

Условия прочности (5.5) принимают вид

– на растяжение:
$$\max \sigma_p = \frac{\max M_x}{J_x} y_p \leq [\sigma_p]; \quad (5.17)$$

$$- \text{ на сжатие: } \max \sigma_{\text{сж}} = \frac{\max M_x}{J_x} y_{\text{сж}} \leq [\sigma_{\text{сж}}]. \quad (5.18)$$

Здесь допускаемые напряжения на растяжение и сжатие соответственно равны

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_B^p}{n_B} = \frac{150}{2} = 75 \text{ МПа}; [\sigma_{\text{сж}}] = \frac{\sigma_{\text{сж}}}{n_B} = \frac{650}{2} = 325 \text{ МПа}.$$

Рассмотрим условие прочности на растяжение (5.17):

$$\max \sigma_p = \frac{\max M_x}{492,4 b^4} 7,67b \leq [\sigma_p],$$

откуда следует, что

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{\max M_x}{492,4 [\sigma_p]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^7}{492,4 \cdot 75}} 7,67 = 18,4 \text{ мм}.$$

Из условия прочности на сжатие получим

$$\frac{\max M_x}{492,4 b^4} 4,33b \leq [\sigma_{\text{сж}}],$$

откуда

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{\max M_x}{492,4 [\sigma_{\text{сж}}]} \cdot 4,33} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^7}{492,4 \cdot 325} \cdot 4,33} = 9,4 \text{ мм}.$$

Из двух полученных значений размера поперечного сечения b выбираем наибольший, т.е. окончательно принимаем $b = 19$ мм. Геометрические характеристики сечения (см. рис. 5.11) при этом равны

$$J_x = 492 b^4 = 492 \cdot 19^4 = 6,41 \cdot 10^7 \text{ мм}^4;$$

$$y_{\text{сж}} = y_1 = 4,33b = 4,33 \cdot 19 = 83,1 \text{ мм};$$

$$y_p = y_2 = 7,67b = 7,67 \cdot 19 = 145,7 \text{ мм}.$$

4. Для построения эпюры нормальных напряжений вычисляем:

– максимальные растягивающие напряжения (5.17)

$$\max \sigma_p = \frac{\max M_x}{J_x} y_p = \frac{3 \cdot 10^7}{6,41 \cdot 10^7} 145,7 = 68,2 \text{ МПа};$$

– максимальные сжимающие напряжения (5.18)

$$\max \sigma_{\text{сж}} = \frac{\max M_x}{J_x} y_{\text{сж}} = \frac{3 \cdot 10^7}{6,41 \cdot 10^7} 83,1 = 38,9 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 5.11,б.

Так как величина касательных напряжений в поперечных сечениях обычно является малой, то расчет по касательным напряжениям не выполняем.

5. Проанализируем эпюру нормальных напряжений σ (см. рис. 5.11,б) при заданном расположении поперечного сечения. Из эпюры следует, что верхние сжатые волокна сечения существенно недогружены.

Так как хрупкий материал на сжатие работает лучше, чем на растяжение ($[\sigma_{\text{сж}}] > [\sigma_{\text{р}}]$), то предложенное расположение сечения является нерациональным.

Для рационального расположения поперечного сечения необходимо обеспечить выполнение условия $y_{\text{сж}} > y_{\text{р}}$, при котором в наиболее удаленных от оси x волокнах будут возникать максимальные сжимающие напряжения. Для этого поперечное сечение, показанное на рис. 5.11,а, необходимо повернуть на 180° (рис. 5.12,а).

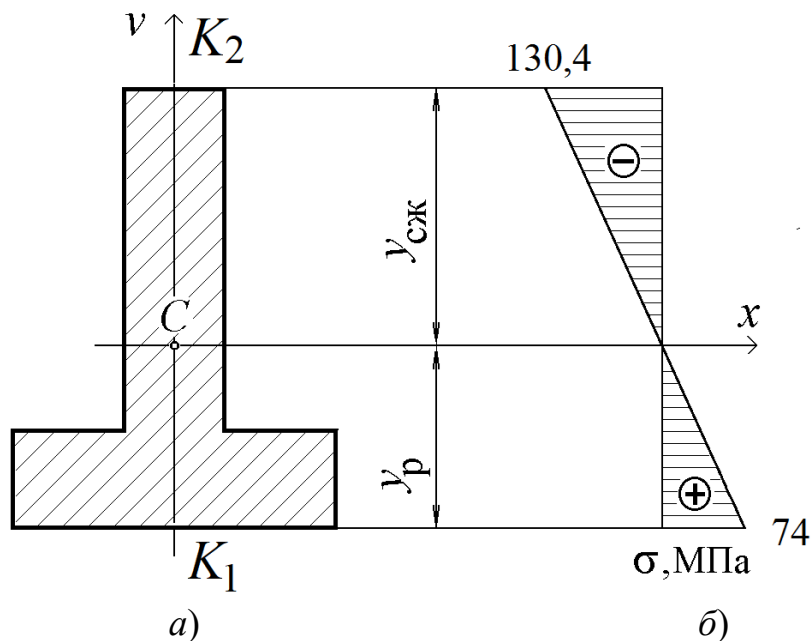


Рис. 5.12. Рациональное расположение поперечного сечения

При этом $y_{\text{сж}} = 7,67b$; $y_{\text{р}} = 4,33b$.

Запишем условия прочности (5.17) и (5.18) для рационального расположения поперечного сечения:

$$\max \sigma_p = \frac{|\max M_x|}{492b^4} 4,33b \leq [\sigma_p],$$

откуда после подстановки данных следует

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{4,33 \cdot 3 \cdot 10^7}{492 \cdot 75}} = 15,3 \text{ мм.}$$

В этом случае наибольшие сжимающие напряжения равны

$$\max \sigma_{сж} = \frac{|\max M_x|}{492b^4} 7,67b = \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 7,67}{492 \cdot 15,3^3} = 129 \text{ МПа} < [\sigma_c] = 250 \text{ МПа}.$$

Условие прочности для сжатых волокон выполняется.

Для рационального положения сечения окончательно принимаем $b = 15,3$ мм.

Геометрические характеристики сечения в этом случае будут равны

$$J_x = 492 \cdot 15,3^4 = 27 \cdot 10^7 \text{ мм}^4, \quad y_p = 4,33 \cdot 15,3 = 66,2 \text{ мм};$$

$$y_{сж} = 7,67 \cdot 15,3 = 117,4 \text{ мм.}$$

Максимальные сжимающие и растягивающие нормальные напряжения равны соответственно

$$\max \sigma_{сж} = \frac{3 \cdot 10^7}{9,57 \cdot 10^7} 117,4 = 130,4 \text{ МПа},$$

$$\max \sigma_p = \frac{3 \cdot 10^7}{2,7 \cdot 10^7} 66,2 = 74 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений для рационального положения поперечного сечения (см. рис. 5.12,а) показана на рис. 5.12,б.

Из эпюры следует, что в этом случае происходит догрузка сжатой части сечения. Кроме того, при таком расположении сечения уменьшается погонный вес балки, который определяется площадью поперечного сечения.

Если поперечное сечение расположено, как показано на рис. 5.11,а, то площадь поперечного сечения балки будет составлять

$$F = 2b \cdot 10b + 2b \cdot 8b = 36b^2 = 36 \cdot 19^2 = 1,3 \cdot 10^4 \text{ мм}^2.$$

При рациональном расположении поперечного сечения (см. рис. 5.12,а) его площадь равна

$$F_{\text{рац}} = 36 \cdot b^2 = 36 \cdot 15,3^2 = 0,84 \cdot 10^4 \text{ мм}^2.$$

Таким образом, выбираем рациональное расположение поперечного сечения балки, показанное на рис. 5.12,а при $b = 15,3$ мм.

В этом случае вес балки уменьшается в $\frac{F}{F_{\text{рац}}} = \frac{1,3 \cdot 10^4}{0,84 \cdot 10^4} = 1,55$ раз,

т.е. на 55 % по сравнению с балкой, у которой сечение расположено так, как показано на рис. 5.11,а.

6. Вычислим прогиб в точке K , используя метод начальных параметров. При этом для сокращения объема вычислений расчетную схему балки располагаем так, как показано на рис. 5.13. В этом случае начальные параметры в универсальном уравнении упругой линии (5.10) будут равны нулю, т.е. $y_0 = \theta_0 = 0$, так как это сечение жестко зашцевлено.

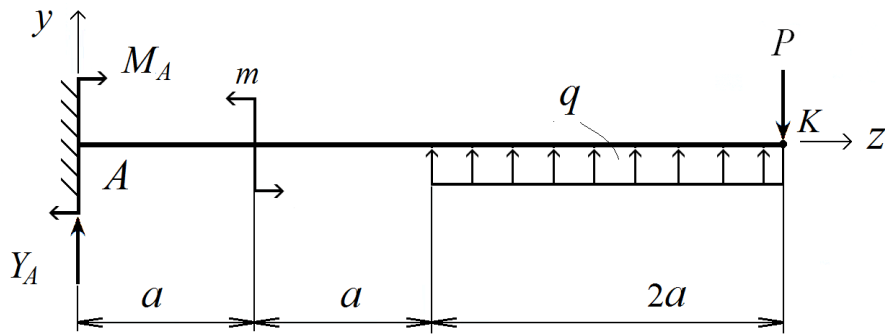


Рис. 5.13. Расчетная схема балки для определения прогибов

Из анализа эпюр Q_y и M_x (рис. 5.10) следует, что опорные реакции равны: $Y_A = -qa$; $M_A = 3qa^2$.

Прогиб в сечении K определяем по уравнению (5.10) при $z = z_K = 4a$:

$$y_K = y(4a) = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{M_A(4a-0)^2}{1 \cdot 2} + \frac{Y_A(4a-0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{m(4a-a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{q(4a-2a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{3qa^2 \cdot 36a^2}{2} - \frac{qa \cdot 16a^3}{6} - \frac{qa^2 \cdot 9a^2}{2} + \frac{q \cdot 16a^4}{24} \right] = 17,5 \frac{qa^4}{EJ_x}.$$

Так как $y_K > 0$, то сечение K балки перемещается вверх. Подставляя численные значения $q = 10$ Н/мм, $a = 10^3$ мм, $J_x = 2,7 \cdot 10^7$ мм⁴, $E = 1,5 \cdot 10^5$ МПа, получим значение прогиба

$$y_K = 17,5 \frac{10(10^3)^4}{1,5 \cdot 10^5 \cdot 2,7 \cdot 10^7} = 2,47 \text{ мм}.$$

5.8. Расчет на прочность статически неопределимых балок

Если для балки число неизвестных опорных реакций превышает число линейно независимых уравнений равновесия, которые можно для нее составить, то такая балка является статически неопределимой. Для определения опорных реакций необходимо дополнительно к уравнению равновесия записать уравнения совместности деформаций [1, 2]. Число уравнений совместности деформаций равно степени статической неопределимости системы. После раскрытия статической неопределимости балки и построения эпюр M_x и Q_y расчеты на прочность и жесткость выполняются аналогично предыдущим пунктам в зависимости от свойств материала балки.

Подробно способы раскрытия статической неопределимости балок и примеры их расчета на прочность и жесткость представлены в [1, 2, 6].

Контрольные вопросы

1. Какой вид нагружения называется изгибом?
2. Как определяются поперечные силы и изгибающие моменты в поперечном сечении балки?
3. Какое нагружение балки называется плоским изгибом?
4. Сформулируйте правило знаков для поперечной силы Q_y .
5. Сформулируйте правило знаков для изгибающего момента M_x .
6. Для чего строят эпюры внутренних силовых факторов?
7. Запишите дифференциальные соотношения между внутренними силовыми факторами при изгибе.
8. Сформулируйте свойства эпюры Q_y .
9. Сформулируйте свойства эпюры M_x .
10. Запишите формулу для определения нормальных напряжений при изгибе.
11. Постройте эпюру нормальных напряжений при изгибе по высоте поперечного сечения балки.
12. Сформулируйте условия прочности по нормальным напряжениям для балок из пластичных и хрупких материалов.
13. Назовите основные этапы расчета на прочность балок при изгибе.

14. Что называется упругой линией балки?
15. Запишите уравнения для прогибов и углов поворота методом начальных параметров.
16. Объясните физический смысл начальных параметров. Как они определяются?
17. Запишите условие жесткости для балки.
18. Какие поперечные сечения следует считать рациональными, если балка изготовлена из пластичного материала?
19. Какие поперечные сечения следует считать рациональными, если балка изготовлена из хрупкого материала?

6. Сложное сопротивление

6.1. Основные понятия

В инженерной практике встречаются более сложные случаи нагружения, когда в поперечных сечениях элемента конструкции одновременно действуют несколько внутренних силовых факторов. В таких случаях говорят, что элемент конструкции испытывает *сложное сопротивление* [1, 2].

При сложном сопротивлении расчеты на жесткость и прочность основываются на принципе суперпозиций.

Большинство задач обычно решается в такой последовательности:

1. Определяются опорные реакции для заданной расчетной схемы.
2. Внешние нагрузки, включая опорные реакции, проектируются на две главные плоскости, проходящие через ось элемента конструкции и главные оси инерции поперечного сечения.
3. Строят эпюры внутренних силовых факторов в главных плоскостях.
4. Исходя из эпюр внутренних силовых факторов, намечают сечения элемента, которые могут оказаться опасными (сечения, в которых внутренние силовые факторы принимают максимальные значения).
5. Для этих сечений выясняют законы распределения напряжений по сечению и устанавливают наиболее нагруженные точки и тип напряженного состояния в этих точках.
6. Перемещения вычисляются от каждого внутреннего силового фактора, а затем геометрически определяются суммарные перемещения и, если требуется, проверяется условие жесткости.

Далее коротко рассмотрены наиболее часто встречающиеся виды сложного сопротивления.

6.2. Пространственный изгиб

Пространственным изгибом называют такой случай изгиба балки, при котором в поперечных сечениях действуют изгибающие моменты M_x , M_y и перерезывающие силы Q_y , Q_x . Так как касательные напряжения от перерезывающих сил являются малыми, то их в расчетах на прочность можно не учитывать. Основными внутренними факторами в произвольном сечении балки являются изги-

бающие моменты, эпюры которых строим методом сечений [1]: в вертикальной плоскости (zOy) строим эпюру M_x , а в горизонтальной плоскости (zOx) строим эпюру M_y .

Покажем это на примере балки с прямоугольным поперечным сечением (рис. 6.1).

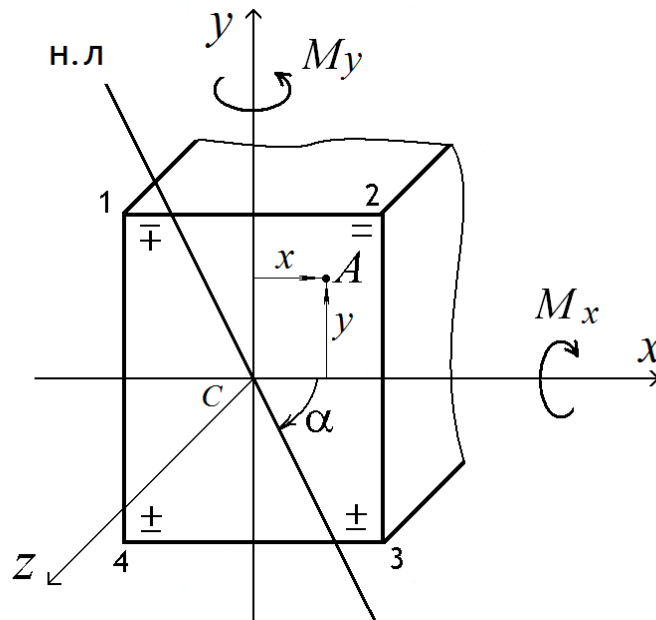


Рис. 6.1. Поперечное сечение балки

Результирующие нормальные напряжения в произвольной точке A поперечного сечения с координатами x и y определяются по принципу суперпозиций с учетом их знака (рис. 6.1):

$$\sigma = \sigma(M_x) + \sigma(M_y), \quad (6.1)$$

где $\sigma(M_x)$ и $\sigma(M_y)$ – нормальные напряжения от изгибающих моментов M_x и M_y соответственно, которые вычисляются по формулам

$$\sigma(M_x) = \frac{M_x}{J_x} y; \quad \sigma(M_y) = \frac{M_y}{J_y} x. \quad (6.2)$$

Здесь J_x и J_y – моменты инерции сечения относительно его главных центральных осей x и y соответственно.

Анализ распределения нормальных напряжений по поперечному сечению показывает, что для сечений с угловыми точками именно угловые точки являются наиболее нагруженными. В угловых точках 1, 2, 3, 4 (рис. 6.1) нормальные напряжения с учетом (6.2) определяются выражением

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}, \quad (6.3)$$

где W_x, W_y – моменты сопротивления сечения балки. Знаки в (6.3) определяются по сжатому волокну балки: для растянутых волокон «+», для сжатых «-». Для показанных на рис. 6.1 направлений M_x и M_y возле угловых точек показаны знаки в формуле (6.3): верхний знак соответствует M_x , а нижний M_y .

Нейтральной линией в поперечном сечении называется прямая линия, на которой нормальные напряжения (6.1) равны нулю.

Нейтральная линия (н.л.) является прямой и проходит через центр тяжести поперечного сечения, а ее положение определяется углом наклона α к оси x . Угол ее наклона вычисляется из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{J_x}{J_y} \frac{M_y}{M_x} \quad (6.4)$$

и откладывается от оси x по часовой стрелке (см. рис. 6.1). Наиболее нагруженными являются точки сечения, наиболее удаленные от нейтральной линии, т.е. точки 2 и 4 (см. рис. 6.1).

Таким образом, величина максимальных нормальных напряжений определяется выражением

$$\max \sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}, \quad (6.5)$$

а условие прочности для балки из пластичных материалов имеет вид (2.14), т.е.

$$\max \sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma], \quad (6.6)$$

где $[\sigma]$ – допускаемые напряжения для материала балки.

Если балка изготовлена из хрупкого материала, то необходимо записать два условия прочности (2.16): $\max \sigma_p \leq [\sigma_p]$ и $\max \sigma_{сж} \leq [\sigma_{сж}]$.

Прогибы для произвольного сечения K балки определяются любым методом (например, методом начальных параметров аналогично п. 5.2) в плоскости $z0y$ (f_y) и плоскости $z0x$ (f_x).

Результирующий прогиб f определяется путем векторного сложения прогибов f_x и f_y (рис. 6.2):

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}. \quad (6.7)$$

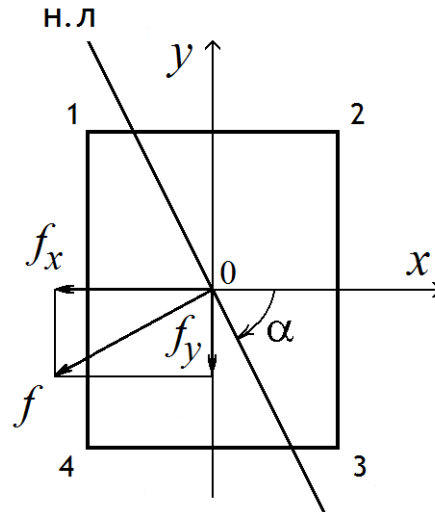


Рис. 6.2. Направление результирующего прогиба для сечения балки

Вычисляя результирующий прогиб в различных сечениях балки, можно построить изогнутую ось балки, которая будет являться пространственной кривой.

6.3. Косой изгиб

Косым изгибом называется такой случай изгиба балки, при котором плоскость действия изгибающего момента (силовая плоскость) не совпадает ни с одной из главных осей поперечного сечения балки (рис. 6.3). Косой изгиб можно считать частным случаем пространственного изгиба.

Раскладывая изгибающий момент M на составляющие моменты относительно осей x и y , получим

$$M_x = M \sin \varphi; \quad M_y = M \cos \varphi. \quad (6.8)$$

Далее расчет ведется в соответствии с п. 6.2 по формулам (6.1)–(6.7).

Существенной особенностью косого изгиба является то, что нейтральная линия не перпендикулярна силовой линии. Таким образом, можно сказать, что балка «предпочитает» изгибаться не в плоскости действия внешнего изгибающего момента, а в неко-

торой другой плоскости, в которой жесткость на изгиб будет меньше. В связи с этим нейтральная линия повернута в сторону главной центральной оси, относительно которой момент инерции поперечного сечения балки является наименьшим.

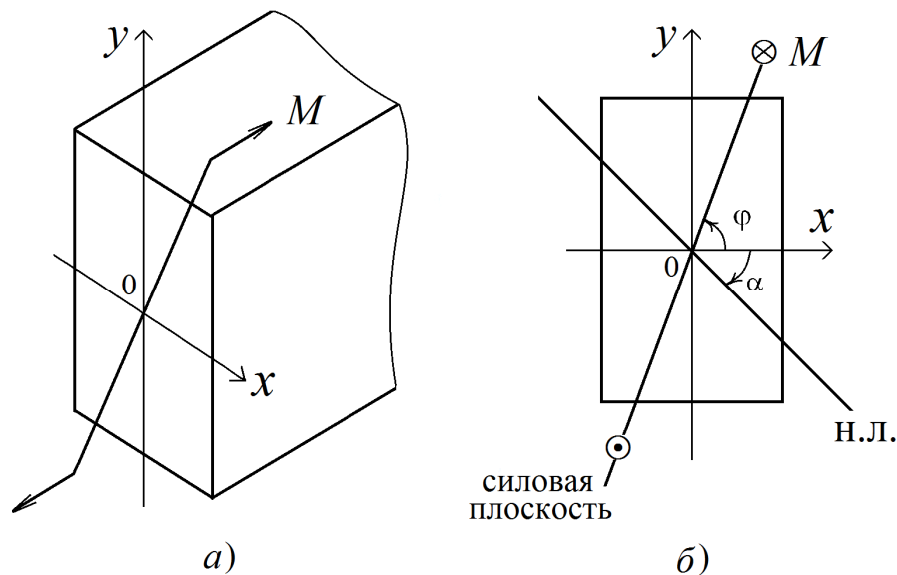


Рис. 6.3. Пример косого изгиба для балки

6.4. Изгиб с растяжением и сжатием

При действии изгиба с растяжением и сжатием в соответствии с принципом суперпозиций нормальные напряжения рассчитываются как

$$\sigma = \sigma(N) + \sigma(M_x) + \sigma(M_y), \quad (6.9)$$

т.е. для произвольной точки поперечного сечения получим

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x. \quad (6.10)$$

Здесь значения внутренних силовых факторов N , M_x , M_y определяются по их эпюрам с учетом фактического знака напряжений.

Если поперечное сечение имеет выступающие углы, то в них аналогично п. 6.2 нормальные напряжения определяются выражением

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}. \quad (6.11)$$

Дальнейший расчет на прочность выполняется аналогично п. 3.6.1.

Частным случаем изгиба с растяжением и сжатием является внецентренное растяжение – сжатие. Рассмотрим случай внецентренного растяжения прямого стержня, к которому в точке K приложена сила P , параллельная продольной оси z (рис. 6.4). Начало координат ($t.0$) расположено в центре тяжести поперечного сечения стержня площадью F (рис. 6.4).

Координаты x_p и y_p характеризует эксцентриситет точки приложения силы P . Точка K называется полюсом силы.

При указанном нагружении в произвольном поперечном сечении стержня возникают следующие внутренние силовые факторы:

– продольная сила

$$N = P; \quad (6.12)$$

– изгибающие моменты относительно осей x и y

$$M_x = Py_p; \quad M_y = Px_p. \quad (6.13)$$

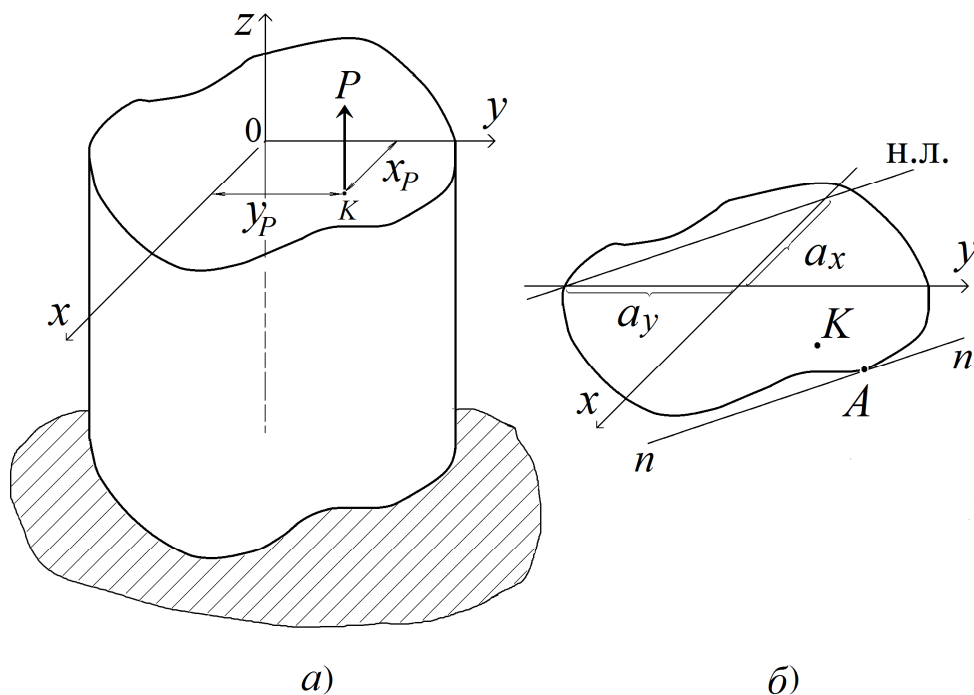


Рис. 6.4. Внецентренное растяжение

Нормальные напряжения в соответствии с принципом суперпозиций вычисляются по формуле (6.9), которая с учетом (6.12) и (6.13) принимает вид

$$\sigma = P \left(\frac{1}{F} + \frac{xx_p}{J_y} + \frac{yy_p}{J_x} \right)$$

или

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{xx_p}{i_y^2} + \frac{yy_p}{i_x^2} \right). \quad (6.14)$$

Здесь i_x, i_y – радиусы инерции поперечного сечения (3.10); x и y – координаты произвольной точки поперечного сечения, в которой вычисляется нормальное напряжение.

Для определения положения нейтральной линии в (6.14) следует положить $\sigma = 0$. Уравнение нейтральной линии при этом принимает вид

$$1 + \frac{x_p}{i_y^2} x + \frac{y_p}{i_x^2} y = 0. \quad (6.15)$$

Уравнение (6.15) является уравнением прямой, которое принято записывать в виде

$$\frac{x}{a_x} + \frac{y}{a_y} = 1. \quad (6.16)$$

где введены обозначения

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_p}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_p} = 1, \quad (6.17)$$

которые имеют следующий геометрический смысл: a_x и a_y – отрезки, отсекаемые нейтральной линией, которая является прямой, на осях x и y соответственно (см. рис. 6.4,б).

Таким образом, для построения нейтральной линии необходимо по заданным координатам полюса (x_p, y_p) и геометрическим характеристикам (i_x, i_y) поперечного сечения вычислить отрезки a_x, a_y с учетом их знака и построить прямую, проходящую через их концы. Из (6.17) следует, что нейтральная линия проходит через квадрант поперечного сечения, противоположный полюсу K (см. рис. 6.4), ее положение не зависит от величины приложенного усилия P . Положение нейтральной линии (н.л.) показано на рис. 6.4,б.

Нейтральная линия делит сечение на две части: в одной части напряжения сжимающие ($\sigma < 0$), в другой – растягивающие ($\sigma > 0$), на нейтральной линии $\sigma = 0$. Наиболее нагруженными являются точки, которые наиболее удалены от нейтральной линии. На рис. 6.4,б показана наиболее удаленная точка A с координатами x_A и y_A . Прямая $n-n$ параллельна нейтральной линии.

Величина максимальных напряжений, возникающих при внецентренном растяжении, определяется по формуле (6.14)

$$\max \sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{x_A x_p}{i_y^2} + \frac{y_A y_p}{i_x^2} \right). \quad (6.18)$$

Координаты плюса $K (x_p, y_p)$ и точки $A (x_A, y_A)$, а также значение силы P представляются в (6.18) с учетом их знака.

Условие прочности для пластичных материалов записывается в виде (2.14), а для хрупких материалов – в виде (2.16).

При внецентренном растяжении (сжатии) вводят понятие ядра сечения.

Ядром сечения называют геометрическое место полюсов силы, для которых во всем поперечном сечении стержня возникают нормальные напряжения одного знака (либо сжимающие, либо растягивающие).

Таким свойством сечение будет обладать только в том случае, если нейтральная линия касается внешнего контура поперечного сечения, поэтому для построения ядра сечения необходимо «обкатывать» нейтральную линию вокруг внешнего контура сечения [1]. Доказано, что ядро сечения образует область, содержащую внутри себя центр тяжести поперечного сечения.

В качестве примера на рис. 6.5 показано ядро сечения для прямоугольного профиля размером $b \times h$.

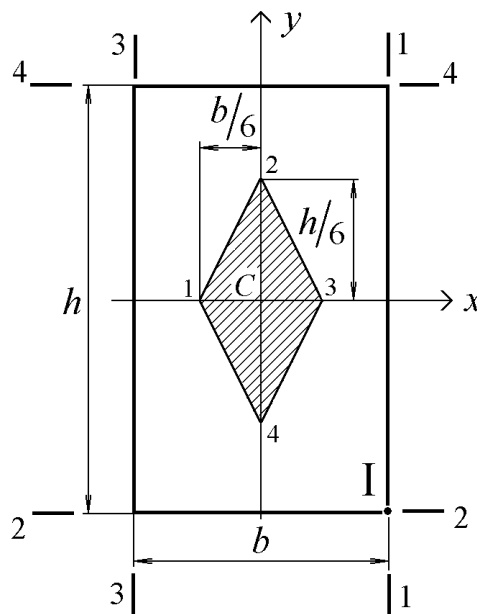


Рис. 6.5. Построение ядра сечения

В этом случае ядро сечения является ромбом (на рис. 6.5 оно заштриховано), содержащим центр тяжести C сечения. Точки 1, 2, 3, 4 ядра соответствуют положениям нейтральной линии 1–1, 2–2, 3–3 и 4–4, которая касается внешнего контура поперечного сечения. При повороте нейтральной линии вокруг угловой точки сечения граница ядра является прямой. Например, при повороте нейтральной линии 1–1 относительно угла сечения I в положение 2–2 получим границу ядра 1–2 и т.д.

Построение ядра сечения обычно выполняют для стержней, изготовленных из хрупких материалов, работающих на сжатие. В этом случае, если сжимающую нагрузку прикладывать в ядре сечения, то по всему сечению будут возникать только сжимающие напряжения. Это существенно повышает несущую способность конструкции.

Примеры расчета на прочность и жесткость элементов конструкций при сложном сопротивлении приведены более подробно в [6].

6.5. Расчет цилиндрических винтовых пружин

Цилиндрические винтовые пружины широко применяются в различных механизмах в машино- и приборостроении.

Рассмотрим цилиндрическую винтовую пружину, которая растягивается (или сжимается) осевыми силами P (рис. 6.6). Пружину изготавливают из проволоки круглого поперечного сечения диаметром d . Материалом проволоки являются высокоуглеродистые пружинистые стали [1].

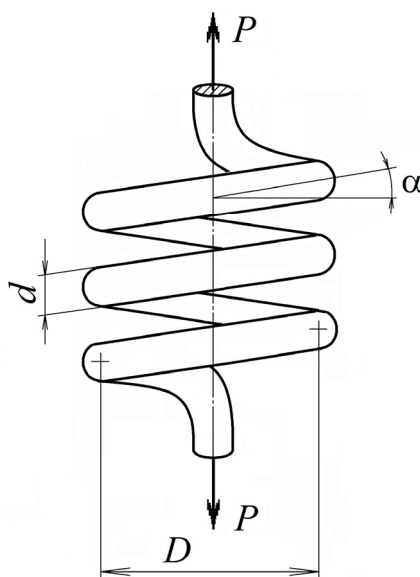


Рис. 6.6. Цилиндрическая пружина

Основные характеристики пружины: D – средний диаметр; n – число витков; α – угол подъема витков.

Пружины обычно имеют малый угол подъема витка α .

На рис. 6.7 показаны векторы внутренних силовых факторов, возникающие в поперечном сечении витка пружины: $\overline{M}$ – главный момент; $\overline{R}$ – главный вектор сил. При этом $R = P$, а $M = P \frac{D}{2}$.

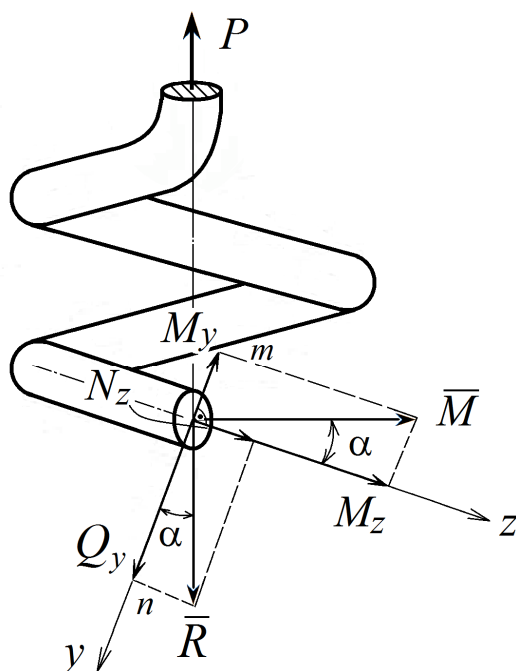


Рис. 6.7. Силовые факторы в сечении витка

Разложим главный вектор сил и главный момент на составляющие по осям x и y , получим, что:

- продольная сила $N_z = R \sin \alpha = P \sin \alpha$;
- поперечная сила $Q_y = R \cos \alpha = P \cos \alpha$;
- крутящий момент $M_z = M_{кр} = M \cos \alpha = \frac{1}{2} PD \cos \alpha$;
- изгибающий момент $M_y = M \sin \alpha$.

При малых углах подъема α положим $\sin \alpha \approx 0$; $\cos \alpha \approx 1$. В этом случае получим, что $N_z = 0$; $M_y = 0$; $Q_y = P$; $M_{кр} = \frac{1}{2} PD$.

Таким образом, считаем, что в поперечном сечении витка пружины действуют перерезывающая сила Q_y и крутящий момент $M_{кр}$ (рис. 6.8), в результате действия которых в поперечном сечении

возникают касательные напряжения $\tau(Q_y) = Q_y/F$ от перерезывающей силы и касательные напряжения $\tau(M_{кр})$ от крутящего момента.

Эпюры касательных напряжений $\tau(Q_y)$ и $\tau(M_{кр})$ показаны на рис. 6.8, б, в. В соответствии с принципом суперпозиций результирующие касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau = \tau(Q_y) + \tau(M_{кр}). \quad (6.19)$$

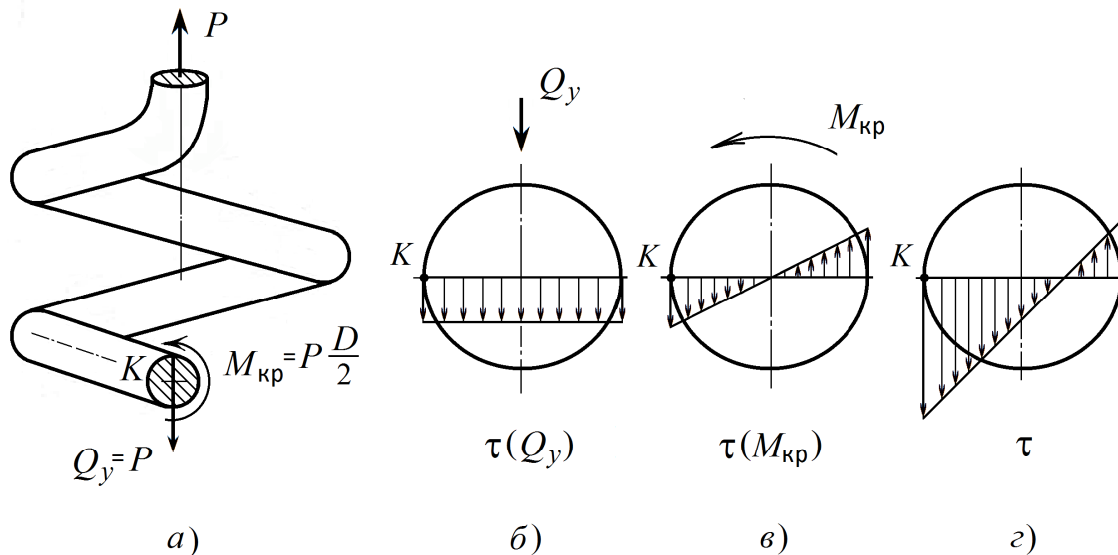


Рис. 6.8. Напряженное состояние в сечении витка пружины

Из эпюры результирующих касательных напряжений τ в сечении витка следует, что наиболее нагруженными являются внутренние точки сечения K (рис. 6.8, г), в которых максимальные касательные напряжения вычисляются с учетом (6.19) по формуле

$$\max \tau = \frac{Q_y}{F} + \frac{M_{кр}}{W_p}. \quad (6.20)$$

Учитывая, что $F = \frac{\pi d^2}{4}$; $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$; $Q_y = P$; $M_{кр} = \frac{1}{2}PD$ преобразуем формулу (6.20) к виду

$$\max \tau = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D} \right). \quad (6.21)$$

Так как обычно отношение $\frac{d}{2D} = 0,05 \dots 0,1$, то, пренебрегая этим отношением по сравнению с единицей, получим приближен-

ную формулу для расчета максимальных касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении витков пружины:

$$\max \tau \approx \frac{8PD}{\pi d^3}. \quad (6.22)$$

Формула (6.22) является приближенной и обычно применяется в практических расчетах пружин с малым углом подъема витков ($\alpha < 10^\circ$).

Исследования, проведенные методами теории упругости, показали, что уточненная формула для определения максимальных касательных напряжений имеет вид

$$\max \tau = k \frac{8PD}{\pi d^3}, \quad (6.23)$$

где k – поправочный коэффициент, величина которого зависит от отношения d/D и угла подъема витка α . Например, при $\bar{D} = \frac{D}{d} \geq 4$ этот коэффициент вычисляют по формуле [10]

$$k = \frac{\bar{D} + 0,25}{\bar{D} - 1}. \quad (6.24)$$

Чаще в инженерных расчетах применяется формула (6.22), которую будем считать расчетной.

В этом случае условие прочности принимает вид

$$\max \tau = \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau]. \quad (6.25)$$

Из этого условия можно определить, например, необходимый диаметр витков, если задаться средним диаметром пружины D :

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{8PD}{\pi[\tau]}}. \quad (6.26)$$

Для специальных высококачественных сталей, которые применяются для изготовления цилиндрических пружин, допускаемые касательные напряжения имеют значения не ниже 450...500 МПа.

При действии усилий P пружина удлиняется (или укорачивается) на величину λ , которая называется осадкой и вычисляется по формуле [1]

$$\lambda = \frac{8PD^3}{Gd^4} n, \quad (6.27)$$

где G – модуль сдвига материала пружины.

При расчете пружины обычно задают требуемую осадку λ и определяют необходимое число ее витков

$$n = \frac{Gd^4}{8PD^3} \lambda. \quad (6.28)$$

Величина действующей силы P известна; D задают из конструктивных соображений; d определяют из условия прочности (6.26).

Контрольные вопросы

1. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях элемента конструкции при пространственном изгибе?
2. Как определяются нормальные напряжения при пространственном изгибе?
3. Какие точки поперечного сечения с выступающими углами являются наиболее нагруженными при пространственном изгибе?
4. Что называется нейтральной линией?
5. Запишите условие прочности при пространственном изгибе.
6. Как определяется положение нейтральной линии при пространственном изгибе?
7. Как определяются перемещения при пространственном изгибе балки?
8. Что называется косым изгибом?
9. Сформулируйте свойства нейтральной линии при косом изгибе.
10. Как вычисляются нормальные напряжения при косом изгибе?
11. Как определяется наиболее нагруженная точка поперечного сечения балки при косом изгибе?
12. Как вычисляются напряжения при растяжении (сжатии) с изгибом?
13. Что такое внецентренное растяжение (сжатие)?
14. Сформулируйте свойства нейтральной линии при внецентренном растяжении (сжатии).
15. Что такое ядро сечения? Для чего оно определяется?
16. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях витка пружины?
17. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях витка пружины?

18. Напишите расчетную формулу для касательных напряжений и условие прочности для пружины.
19. Как вычисляется осадка пружины?
20. Как определяется требуемый диаметр витка пружины?
21. Как определяется необходимое число витков пружины?

7. Основы напряженно-деформированного состояния

7.1. Анализ напряженного состояния

Большинство элементов конструкций работает в условиях сложного напряженного состояния, которое в самом общем случае характеризуется тензором напряжений T_σ для каждой точки упругого тела

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения, действующие на гранях бесконечно малого элемента, выделенного в исследуемой точке A конструкции (рис. 7.1); $\tau_{yx}, \tau_{yz} \dots$ – касательные напряжения, действующие на гранях этого элемента [1].

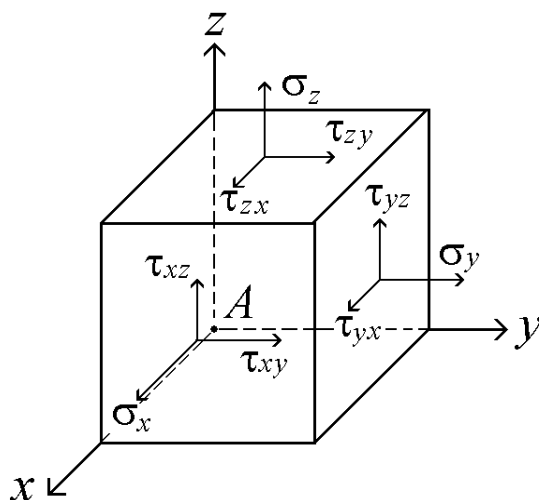


Рис. 7.1. Напряженное состояние в исследуемой точке

Существенной особенностью напряженного состояния является то, что в соответствии с условиями равновесия этого элемента выполняется **закон парности** касательных напряжений, по которому выполняются соотношения

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (7.2)$$

Закон парности касательных напряжений формулируется следующим образом.

На двух взаимно перпендикулярных гранях, имеющих общее ребро, действуют касательные напряжения, которые направлены к ребру либо от ребра и равны между собой по величине.

Таким образом, тензор напряжений (7.1) является симметричным, а напряженное состояние в точке конструкции в самом общем случае характеризуется шестью напряжениями: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. Существенной особенностью является то, что величина этих напряжений существенно зависит от ориентации элемента в пространстве [1] и не позволяет однозначно характеризовать НДС в исследуемой точке элемента конструкции.

В теории упругости доказано, что существует единственное положение элемента в пространстве, при котором одновременно на всех его гранях все касательные напряжения равны нулю и действуют только нормальные напряжения (рис. 7.2).

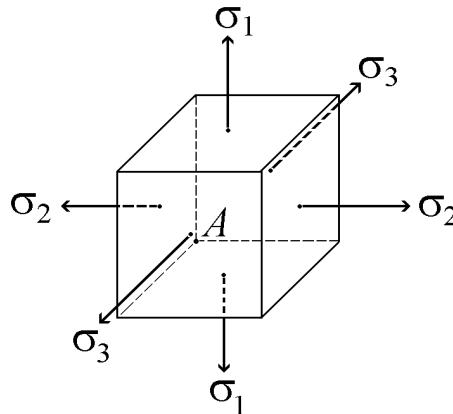


Рис. 7.2. Главные напряжения

Площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, называются главными площадками. Нормальные напряжения, действующие на главных площадках, называются главными и обозначаются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Таким образом, главные напряжения однозначно определяют напряженное состояние в исследуемой точке и нумеруются по следующему правилу с учетом их знака:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (7.3)$$

Главные напряжения являются корнями кубического уравнения

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0. \quad (7.4)$$

Здесь J_j – инварианты ($j = 1, 2, 3$), величины которых не зависят от ориентации исходных площадок выделенного бесконечно малого элемента (рис. 7.1) и определяются выражениями

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ J_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2); \\ J_3 &= |T_\sigma| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Инвариант J_3 – определитель тензора напряжения, является симметричным относительно его главной диагонали в соответствии с законом парности касательных напряжений (7.2).

Существенной особенностью является то, что независимо от ориентации граней элемента в пространстве, значения инвариантов напряжений не изменяются. Таким образом, при любой ориентации граней уравнение (7.4) не изменяется и имеет корни, однозначно определяющие значения главных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 .

Существует три вида напряженного состояния:

- *линейным называется напряженное состояние, при котором два главных напряжения равны нулю (например, $\sigma_2 = \sigma_3 \equiv 0$);*
- *плоским называется состояние, при котором одно главное напряжение равно нулю (например, $\sigma_2 \equiv 0$);*
- *объемным называется состояние, при котором все главные напряжения отличны от нуля ($\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_3 \neq 0$).*

Примеры видов напряженного состояния:

- при растяжении стержней и изгибе балок в наиболее нагруженных точках поперечного сечения напряженное состояние является линейным: $\sigma_1 = \max \sigma; \sigma_2 = \sigma_3 \equiv 0$ (см. п. 5);
- при кручении валов круглого поперечного сечения напряженное состояние является плоским: $\sigma_1 = \tau; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\tau_1$, где τ – касательные напряжения (см. п. 4);
- объемное напряженное состояние имеет место в зоне контакта шарика (ролика) с обоймой подшипника качения.

7.2. Обобщенный закон Гука

При сложном напряженном состоянии обобщенный закон Гука устанавливает связь между главными напряжениями $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и главными относительными деформациями $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ в виде [1]

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)], \end{cases} \quad (7.6)$$

где E и μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала элемента конструкции.

Главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и главные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ полностью характеризуют напряженно-деформированное состояние (НДС) в любой точке элемента конструкции.

Рассмотрим частные случаи обобщенного закона Гука:

1. При плоском напряженном состоянии (при $\sigma_3 \equiv 0$) обобщенный закон Гука имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2), \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1), \\ \varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2). \end{cases} \quad (7.7)$$

Существенной особенностью является то, что относительная деформация $\varepsilon_3 \neq 0$.

Решая систему двух первых уравнений (7.7) относительно главных напряжений σ_1 и σ_2 , получим иную форму обобщенного закона Гука при плоском напряженном состоянии

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \\ \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1). \end{cases} \quad (7.8)$$

Эта форма записи используется обычно в тех случаях, когда для исследуемого элемента конструкции известны относительные деформации ε_1 и ε_2 и требуется определить главные напряжения. Например, при экспериментальных исследованиях напряженно-деформированного состояния с помощью тензометрического метода [4].

2. При линейном напряженном состоянии (при $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) обобщенный закон Гука принимает вид $\sigma_1 = E\varepsilon_1$;

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E}\sigma_1 = -\mu\varepsilon_1, \quad (7.9)$$

что совпадает с обычным законом Гука (2.4) при растяжении. Здесь необходимо обратить внимание на то, что при $\sigma_2 = \sigma_3 \equiv 0$ относительные деформации $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \neq 0$.

7.3. Критерии прочности

При расчетах на прочность элементов конструкций, имеющих сложное напряженное состояние, это состояние (рис. 7.3,а) заменяется эквивалентным ему, с точки зрения прочности, линейным состоянием, при котором на гранях элемента действуют только эквивалентные напряжения $\sigma_{\text{экв}}$ (рис. 7.3,б).

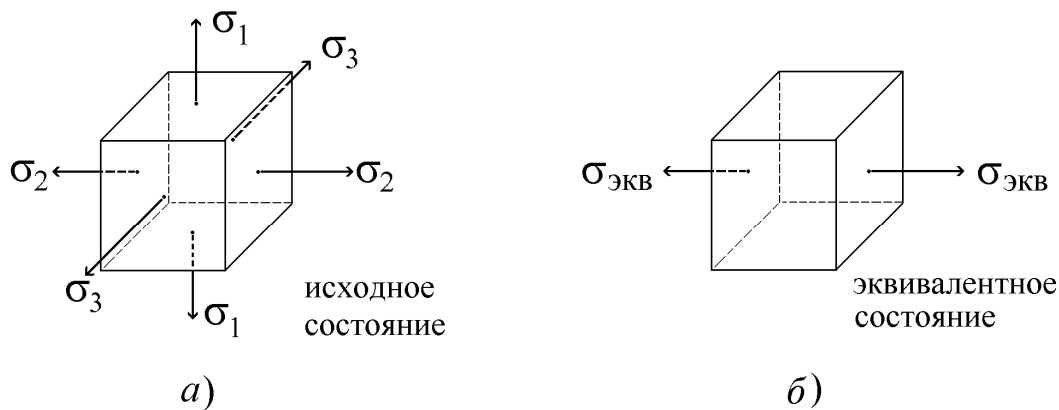


Рис. 7.3. Переход к эквивалентному напряженному состоянию

Величина эквивалентных напряжений определяется как функция от главных напряжений

$$\sigma_{\text{экв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad (7.10)$$

где вид функции f определяется экспериментальными и теоретическими критериями (теориями) прочности [1].

Так как характер разрушения элементов конструкций из хрупких и пластичных материалов является различным, то критерии вводятся отдельно для хрупких и пластичных материалов [1].

7.3.1. Критерии прочности для хрупких материалов

Первый критерий (критерий наибольших напряжений):

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{I}} = \max(|\sigma_1|; |\sigma_3|). \quad (7.11)$$

В качестве эквивалентного выбирается наибольшее по абсолютной величине главное напряжение.

Так как критерий учитывает только одно главное напряжение из трех, то он имеет весьма ограниченную область применения. Экспериментальная проверка показала, что его можно применять только для очень хрупких материалов (стекло, керамика).

Второй критерий. Критерий Сен-Венана (критерий наибольших относительных деформаций). В соответствии с критерием эквивалентные напряжения определяются выражением [1]

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{II}} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad (7.12)$$

где μ – коэффициент Пуассона материала элемента конструкции.

Критерий учитывает все главные напряжения и широко применяется на практике.

Экспериментальный критерий Мора

В соответствии с критерием эквивалентные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{M}} = \sigma_1 - m\sigma_3, \quad (7.13)$$

где коэффициент $m = \frac{\sigma_{\text{B}}^{\text{P}}}{\sigma_{\text{B}}^{\text{СЖ}}}$; $\sigma_{\text{B}}^{\text{P}}$ и $\sigma_{\text{B}}^{\text{СЖ}}$ – пределы прочности материала на растяжение и сжатие соответственно.

Так как для хрупких материалов $\sigma_{\text{B}}^{\text{СЖ}} > \sigma_{\text{B}}^{\text{P}}$, то выполняется условие $0 < m < 1$.

Так как критерий не учитывает напряжение σ_2 , то его рекомендуется применять для случаев простого напряженного состояния, когда $\sigma_2 = 0$ или является малым.

П р и м е ч а н и е. Сравним второй критерий с критерием Мора для случая плоского напряженного состояния при $\sigma_2 = 0$:

– по второму критерию получим

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu\sigma_3; \quad (7.14)$$

– по критерию Мора

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{M}} = \sigma_1 - m\sigma_3. \quad (7.15)$$

Так как среднее значение коэффициента Пуассона для стали $\mu \approx 0,3$; а среднее значение коэффициента m для хрупких материалов $m \approx (0,2...0,4)$, то теоретический критерий (7.14) и экспериментальный критерий (7.15) дают сопоставимые результаты. Это подтверждает правильность выбранных критериев при выполнении практических расчетов на прочность в случае сложного НДС.

7.3.2. Критерии прочности для пластичных материалов

Третий критерий (критерий наибольших касательных напряжений).

Эквивалентные напряжения определяются выражением [1]

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (7.16)$$

Так как критерий не учитывает главное напряжение σ_2 , то его рекомендуется применять в тех случаях, когда $\sigma_2 = 0$ или является малым.

Четвертый критерий (критерий Губера – Мизеса).

Этот критерий является энергетическим и основан на определении удельной потенциальной энергии, вызывающей недопустимое изменение формы элемента конструкции, т.е. его текучесть.

Величина эквивалентных напряжений определяется выражением [1]

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \quad (7.17)$$

и учитывает все главные напряжения, что обеспечивает его высокую точность и согласованность с результатами экспериментальных исследований.

Расчетная практика показывает, что при применении третьего и четвертого критериев прочности всегда выполняется условие

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} \geq \sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}}. \quad (7.18)$$

Таким образом, третий критерий дает завышенное или точное значение эквивалентных напряжений. Так как вычисления по третьему критерию оказываются проще, то его чаще применяют в практических расчетах на прочность элементов конструкций, находящихся в сложном напряженном состоянии. При этом расчет на прочность по третьему критерию в силу выполнения условия (7.18) приводит к тому, что проектируемый элемент конструкции

будет иметь коэффициент запаса прочности несколько больше, чем он был задан.

П р и м е ч а н и е. При расчете эквивалентных напряжений по формулам (7.11)–(7.17) обязательно необходимо учитывать знаки главных напряжений в соответствии с правилом их нумерации (7.3).

7.3.3. Частные случаи напряженного состояния

Рассмотрим частные случаи напряженного состояния при некоторых видах нагружения.

При кручении валов круглого поперечного сечения в поперечных сечениях действуют только касательные напряжения τ .

Нормальные напряжения отсутствуют.

В этом случае главные напряжения равны [1]

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau,$$

а напряженное состояние является плоским.

Эквивалентные напряжения, вычисленные по III и IV критериям (7.16) и (7.17), соответственно равны

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \tau - (-\tau) = 2\tau; \quad \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\tau - 0)^2 + (\tau + \tau)^2 + (\tau - 0)^2]} = \sqrt{3}\tau.$$

Сравнивая значения эквивалентных напряжений, получим $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} > \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}}$, что соответствует условию (7.18).

При изгибе с кручением в произвольной точке поперечного сечения вала действуют нормальные напряжения σ и касательные напряжения τ .

Главные напряжения при этом равны [1]

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad \sigma_2 = 0, \quad (7.19)$$

где знак «+» относится к σ_1 , а знак «–» к σ_3 .

Эквивалентные напряжения по III и IV критериям после подстановки (7.19) в (7.16) и (7.17) определяются по формулам

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (7.20)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \quad (7.21)$$

т.е. соотношение (7.18) выполняется.

Общий случай плоского напряженного состояния в точке A показан на рис. 7.4.

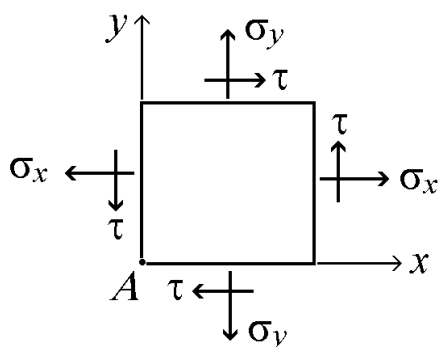


Рис. 7.4. Напряженное состояние в точке A

В этом случае

$$\sigma_z = 0; \quad \tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0.$$

Вычисляя инварианты (7.5) и решая уравнение (7.4), получим корни уравнения $\sigma_{(j)}$ при $j = 1, 2, 3$

$$\sigma_{(1),(2)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}; \quad (7.22)$$

$$\sigma_{(3)} = 0.$$

Окончательная нумерация главных напряжений производится в соответствии с правилом (7.3). Так как одно из главных напряжений равно нулю, то в соответствии с п. 7.1 напряженное состояние является плоским.

Подставляя выражения (7.22) в (7.16) и (7.17), получим значения эквивалентных напряжений по третьему и четвертому критериям прочности. Так как эти выражения являются достаточно сложными для четвертого критерия, то окончательно в (7.16), (7.17) следует подставлять численные значения главных напряжений (7.21), рассчитанные для конкретной задачи.

7.4. Расчет на прочность при изгибе с кручением валов круглого поперечного сечения

7.4.1. Основные соотношения

Рассматриваем валы круглого поперечного сечения, работающие на изгиб с кручением. К таким элементам конструкций относятся валы коробок передач, редукторов, трансмиссионные и другие разновидности валов различных машин и механизмов.

В самом общем случае считаем, что имеет место пространственный изгиб, т.е. в поперечном сечении действуют два изгибающих момента M_x и M_y и крутящий момент $M_{кр}$ (рис. 7.5,а). Изображая изгибающих моменты в виде векторов $\bar{M}_x$ и $\bar{M}_y$, получим, что их можно привести к результирующему изгибающему моменту (рис. 7.5,б)

$$M_{и} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} . \quad (7.23).$$

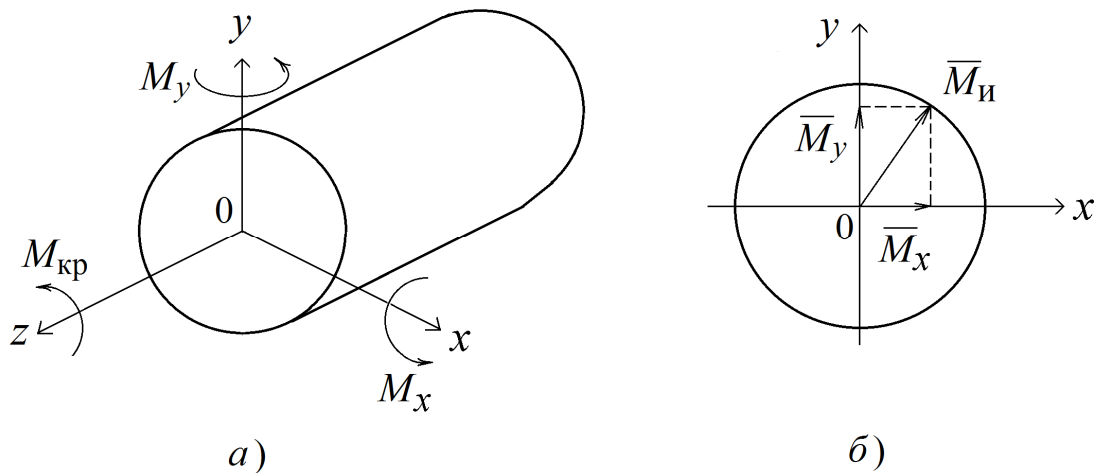


Рис. 7.5. Схема пространственного изгиба

Таким образом, имеет место пространственный изгиб вала под действием изгибающего момента $M_{и}$, который определяется в каждом сечении по эпюре изгибающих моментов M_x и M_y . Используя соотношение (7.23), строим эпюру результирующего изгибающего момента $M_{и}$, максимальные нормальные напряжения от действия которого определяются выражением

$$\max \sigma = \frac{M_{и}}{W_{и}}, \quad (7.24)$$

где момент сопротивления круглого поперечного сечения на изгиб ($W_{и} = W_x = W_y$):

– для круглого сечения

$$W_{и} = \frac{\pi D^3}{32}; \quad (7.25)$$

– для кольцевого сечения

$$W_{\text{и}} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4), \quad (7.26)$$

при $\alpha = \frac{d}{D}$, где D, d – внешний и внутренний диаметр вала.

При действии крутящего момента $M_{\text{кр}}$ в наиболее нагруженных внешних точках поперечного сечения вала возникают касательные напряжения τ , максимальная величина которых вычисляется по формуле

$$\max \tau = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{р}}}, \quad (7.27)$$

где $W_{\text{р}}$ – полярный момент сопротивления (момент сопротивления при кручении), который для вала круглого поперечного сечения определяется соотношением

$$W_{\text{р}} = 2W_{\text{и}}. \quad (7.28)$$

Так как при изгибе с кручением напряженное состояние в наиболее нагруженных точках вала является упрощенным плоским, то при расчете на прочность необходимо вычислить главные напряжения (7.19) и соответствующие им эквивалентные напряжения (7.10) на основании выбранного критерия прочности.

Условие прочности для пластичных материалов в этом случае записывается в виде

$$\max \sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma], \quad (7.29)$$

где $\max \sigma_{\text{экв}}$ – максимальные эквивалентные напряжения в наиболее нагруженном поперечном сечении вала.

Валы, работающие на изгиб с кручением, чаще всего изготавливают из пластичных материалов, поэтому для расчетов на прочность используют третий (7.20) или четвертый (7.21) критерии прочности.

Выражения для эквивалентных напряжений по третьему и четвертому критериям прочности можно привести к единой формуле

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_{\text{и}}}, \quad (7.30)$$

в которой эквивалентный момент $M_{\text{экв}}$ в зависимости от выбранного критерия прочности (7.20) или (7.21) с учетом (7.28) вычисляется по формулам

– для третьего критерия: $M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{кр}}^2}$; (7.31)

– для четвертого критерия: $M_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}$. (7.32)

Выбрав критерий, строят эпюру эквивалентного момента $M_{\text{ЭКВ}}$ по длине вала и определяют наиболее нагруженное поперечное сечение, в котором $M_{\text{ЭКВ}}$ принимает максимальное значение $\max M_{\text{ЭКВ}}$. В соответствии выражениями (7.29) и (7.30) записывают условие прочности

$$\max \sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{\max M_{\text{ЭКВ}}}{W_{\text{и}}} \leq [\sigma]. \quad (7.33)$$

Обеспечивая выполнение условия прочности (7.13), решают одну из поставленных задач:

- выполняют проверочный расчет;
- выполняют проектный расчет;
- определяют допускаемую внешнюю нагрузку, действующую на вал.

7.4.2. Расчет трансмиссионного вала

На вал насажены два шкива, через которые перекинута ременная передача (рис. 7.6). Ветви ремней параллельны друг другу и наклонены к горизонту под углами α_1 и α_2 . От первого шкива ремень идет к электродвигателю; в этом ремне усилие в сбегающей ветви вдвое больше, чем в набегающей. От второго шкива ремень идет к станку; в этом ремне усилие в набегающей ветви вдвое больше, чем в сбегающей.

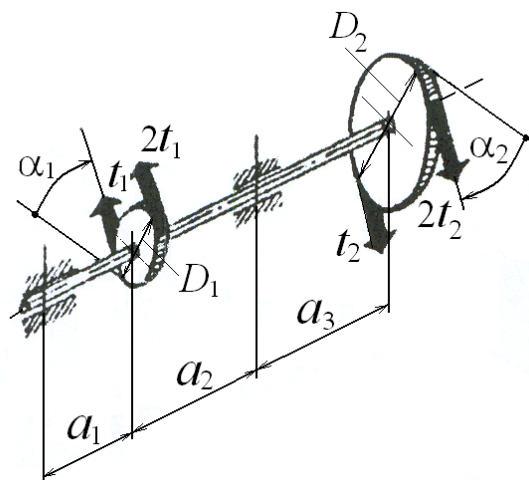


Рис. 7.6. Трансмиссионный вал ременной передачи

Станок имеет мощность N (кВт); частоту вращения вала n (мин^{-1}). Материал вала – Сталь 20 с пределом текучести $\sigma_T = 240$ МПа; нормативный коэффициент запаса прочности принять равным $n_T = 1,5$.

Выполнить проектный расчет трансмиссионного вала ременной передачи (рис. 7.7,а). Вал сплошной и имеет внешний диаметр d . Шкивы имеют диаметры D_1 и D_2 (рис. 7.7).

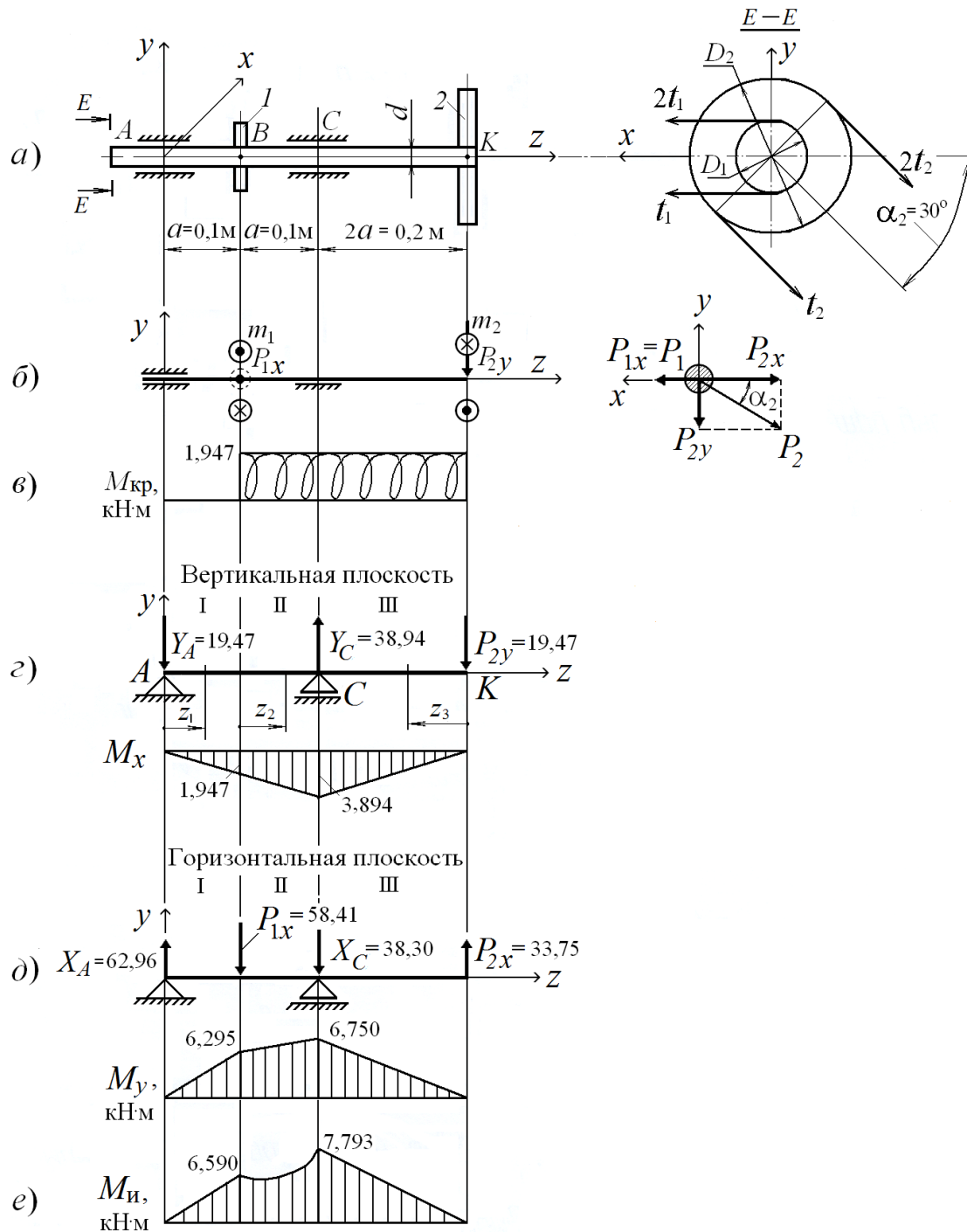


Рис. 7.7. Расчетная схема трансмиссионного вала

Исходные данные: $a_1 = a_2 = a = 0,1$ м; $a_3 = 2a = 0,2$ м; $D_1 = 2D = 0,2$ м; $D_2 = 3D = 0,3$ м; $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 30^\circ$; $N = 20$ кВт; $n = 100$ мин⁻¹.

Решение

В местах посадки шкивов возникают равнодействующие усилия от натяжений ремней и скручивающие пары от разности натяжений сбегавшей и набегающей ветвей ремней. Следовательно, вал работает на изгиб и кручение (см. рис. 7.7,б).

1. Определяем внешний скручивающий момент:

$$m = 9,736 \frac{N}{n} = 9,736 \frac{20}{100} = 1,947 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2. Строим эпюру крутящих моментов. Из условия равновесия заключаем, что $m_1 = m_2 = m = 1,947$ кН·м (см. рис. 7.7,в). Крутящий момент на участке BK $M_{\text{экр}} = m = 1,974$ кН·м.

3. Определяем усилия натяжения ремней t_1 и t_2 :

$$m_1 = m = \frac{1}{2} t_1 D_1, \text{ отсюда } t_1 = \frac{2m}{D_1} = \frac{2 \cdot 1,947}{0,2} = 19,47 \text{ кН};$$

$$m_2 = m = \frac{1}{2} t_2 D_2, \text{ отсюда } t_2 = \frac{2m}{D_2} = \frac{2 \cdot 1,947}{0,3} = 12,98 \text{ кН}.$$

4. Определяем равнодействующие усилия натяжения ремней, действующих на вал в местах посадки шкивов:

$$P_1 = 3t_1 = 3 \cdot 19,47 = 58,41 \text{ кН}; P_2 = 3t_2 = 3 \cdot 12,98 = 38,94 \text{ кН}.$$

По условиям задачи усилие P_1 направлено горизонтально ($\alpha_1 = 0$), а P_2 – под углом $\alpha_2 = 30^\circ$.

Для удобства построения эпюр изгибающих моментов разложим силу P_2 на вертикальную P_{2y} и горизонтальную P_{2x} составляющие:

$$P_{2y} = P_2 \sin 30^\circ = 38,94 \cdot 0,5 = 19,17 \text{ кН};$$

$$P_{2x} = P_2 \cos 30^\circ = 38,94 \cdot 0,8667 = 33,75 \text{ кН}.$$

Составим расчетные схемы в горизонтальной плоскости (см. рис. 7.7,з) и в вертикальной (см. рис. 7.7,д).

5. Строим эпюру изгибающих моментов M_x в вертикальной плоскости yAz (см. рис. 7.7,з).

Из уравнений равновесия определяем опорные реакции Y_A и Y_C :

$$\Sigma \text{ мом } A = 0; Y_C 2a - P_{2y} \cdot 4a = 0,$$

$$Y_C = 2 P_{2y} = 2 \cdot 19,17 = 38,34 \text{ кН};$$

$$\Sigma \text{ мом } C = 0; Y_A 2a - P_{2y} 2a = 0,$$

$$Y_A = P_{2y} = 19,47 \text{ кН.}$$

Уравнения изгибающих моментов:

$$M_{x_I} = -Y_A z_I = -19,47 z_I; \quad 0 \leq z_I \leq 0,1 \text{ м,}$$

$$\text{при } z_I = 0 \quad M_{x_I} = 0;$$

$$\text{при } z_I = 0,1 \text{ м} \quad M_{x_I} = -1,947 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$M_{x_{II}} = -Y_A (0,1 + z_{II}) = -19,47(0,1 + z_{II}); \quad 0 \leq z_{II} \leq 0,1 \text{ м,}$$

$$\text{при } z_{II} = 0 \quad M_{x_{II}} = -1,947 \text{ кН}\cdot\text{м;}$$

$$\text{при } z_{II} = 0,1 \text{ м} \quad M_{x_{II}} = -3,894 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$M_{x_{III}} = -P_2 z_{III} = -19,47 z_{III}; \quad 0 \leq z_{III} \leq 0,2 \text{ м,}$$

$$\text{при } z_{III} = 0 \quad M_{x_{III}} = 0;$$

$$\text{при } z_{III} = 0,2 \text{ м} \quad M_{x_{III}} = -3,894 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

6. Строим эпюру изгибающих моментов M_y в горизонтальной плоскости xAz (см. рис. 7.7,д).

Из уравнений равновесия определяем опорные реакции X_A и X_C :

$$\Sigma \text{ мом } A = 0; P_{1x} a - X_C 2a + P_{2x} 4a = 0,$$

$$X_C = 0,5(4 P_{2x} - P_{1x}),$$

$$X_C = 0,5(4 \cdot 33,75 - 58,41) = 38,30 \text{ кН;}$$

$$\Sigma \text{ мом } C = 0; X_A 2a + P_{1x} a + P_{2x} 2a = 0,$$

$$X_A = 0,5(P_{1x} + 2 \cdot P_{2x}),$$

$$X_A = 0,5(58,41 + 33,75 \cdot 2) = 62,96 \text{ кН.}$$

По участкам, используя метод сечений, аналогично предыдущему пункту строим эпюру изгибающего момента M_y в горизонтальной плоскости (см. рис. 7.7,д).

7. Строим эпюру результирующего изгибающего момента $M_{\text{и}}$ (7.23) (см. рис. 7.7,е), складывая геометрически эпюры M_x и M_y :

$$M_{\text{и}} = \sqrt{M_y^2 + M_x^2}.$$

В характерных точках B и C они равны соответственно

$$M_{и(B)} = \sqrt{1,947^2 + 6,296^2} = 6,590 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{и(C)} = \sqrt{3,894^2 + 6,75^2} = 7,793 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Следовательно, опасным сечением будет сечение C , для которого

$$M_{и(C)} = 7,793 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad M_{кр(C)} = 1,947 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

8. Определяем по четвертой теории прочности эквивалентный момент $M_{\text{экв}}^{\text{IV}}$ в опасном сечении C (7.32):

$$M_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{и(C)}^2 + 0,75M_{кр(C)}^2},$$

$$M_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{7,793^2 + 0,75 \cdot 1,947^2} = 7,975 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

9. Определяем необходимый диаметр d вала. Допускаемое напряжение принимаем равным $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа}$.

Условие прочности имеет вид

$$\max \sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{W_{и}} \leq [\sigma],$$

где $W_{и} = \frac{\pi d^3}{32}$.

$$\text{Тогда } d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \max M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 7,975 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 160}} = 79,4 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем диаметр трансмиссионного вала $d = 80 \text{ мм}$.

П р и м е ч а н и е. Примеры расчета элементов конструкций при общем случае сложного сопротивления рассмотрены в [6].

7.5. Экспериментальные методы исследования напряженно-деформированного состояния элементов конструкций

Для проведения экспериментальных исследований НДС элементов конструкций применяются различные методы, позволяющие экспериментально определить деформации и напряжения,

возникающие в моделях, образцах или реальных конструкциях при внешних воздействиях на них [1, 3–5].

Рассмотрим основные экспериментальные методы исследования НДС элементов конструкций.

7.5.1. Метод лаковых покрытий

Метод заключается в том, что на поверхность исследуемой конструкции наносится слой специального лака. При его высыхании образуется тонкая пленка, плотно соединенная с исследуемой поверхностью изделия. При нагружении испытуемого образца в зоне повышенных напряжений в лаковом покрытии образуется сетка мелких трещин.

Опыт показывает, что трещины развиваются в направлении, перпендикулярном к оси максимальных удлинений. Для изотропных материалов это соответствует направлениям главного растягивающего напряжения. Расположение трещин в лаковом покрытии позволяет установить наиболее нагруженные зоны на поверхности конструкции и установить направления, по которым действуют главные напряжения. Лаковые покрытия изготавливаются по определенным рецептурам, которые позволяют создать гамму лаков с различными характеристиками его разрушения.

Метод лаковых покрытий имеет наибольшее значение не как самостоятельный метод определения напряжений, а как вспомогательный (предварительный) метод, позволяющий при помощи достаточно простых средств установить направления главных осей в исследуемых зонах и ориентировочно установить порядок действующих напряжений. После такого предварительного испытания имеется возможность наиболее точно располагать датчики, измеряющие напряжения и деформации, действующие в исследуемых зонах на поверхности испытуемых изделий.

7.5.2. Оптический метод

Оптический метод исследования НДС заключается в том, что прозрачная модель из оптически активного материала в нагруженном состоянии просвечивается в поляризованном свете. Изображение модели на экране при этом оказывается покрытым системой полос, форма и расположение которых определяются напряженным состоянием модели [1]. Путем анализа расположения этих полос можно найти величину возникающих в модели напряжений.

Наиболее просто оптическим методом можно исследовать плоское напряженное состояние оптически активной модели.

Более подробно принцип работы оптического метода представлен в [1]. Для этого метода обычно применяются полярископы.

7.5.3. Рентгеновский метод

Рентгеновский метод определения напряжений основан на замере расстояния между атомами кристаллической решетки материала. Это расстояние может меняться по двум причинам: вследствие температурного и вследствие силового воздействия. В ненапряженном состоянии расстояние между атомами известно. Сопоставляя это расстояние с замеренным, можно найти относительное удлинение, и, вводя температурную поправку, определяют действующее напряжение. Рентгеновский метод дает абсолютные значения действующих напряжений. Этот метод удобно применять при определении остаточных технологических напряжений в элементах изделия. Например, этим методом определяют остаточные напряжения в зоне сварного шва после его остывания до нормальной температуры. Подробно рентгеновский метод рассмотрен в [1].

Несмотря на то, что по сравнению с другими рентгеновский метод обладает бесспорными преимуществами в определении остаточных (технологических) напряжений, в практике лабораторных исследований он не получил широкого распространения. Это объясняется прежде всего громоздкостью и большой стоимостью применяемой аппаратуры, а также сложностью обработки результатов измерений. Этот метод в настоящее время нуждается в дальнейшем совершенствовании.

7.5.4. Тензометрический метод

Одним из наиболее распространенных методов экспериментального определения деформаций, а следовательно и напряжений, является электротензометрический метод, основанный на тензоре-зисторном эффекте – изменение сопротивления проводника (тензорезистора) в результате его деформации [4]. Регистрируя это изменение, можно определить деформацию детали в месте закрепления тензорезистора. Достоинствами тензорезисторов по сравнению с другими тензометрами (механическими, оптическим и пр.) являются высокая чувствительность и малогабаритность, что позволяет устанавливать их в труднодоступных местах и измерять деформации на весьма малых участках поверхности детали.

Применяют проволочные, фольговые и полупроводниковые тензорезисторы (рис. 7.8).

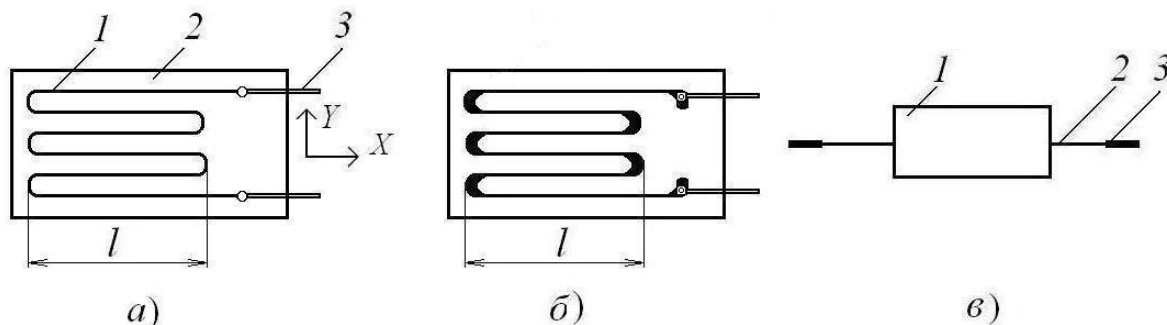


Рис. 7.8. Основные виды тензорезисторов:

a – проволочный петлевой; *б* – фольговый; *в* – полупроводниковый

Проволочный тензорезистор (рис. 7.8,*a*) представляет собой плоскую спираль *1* константовой или нихромовой проволоки диаметром 0,015...0,030 мм, наклеенную на бумажную подложку 2. Концы спирали припаяны к выводам 3 из более толстого проводника. Сопротивление *R* тензорезисторов составляет обычно 50...400 Ом, длина *l* называется базой. База тензорезисторов *l* в пределах 2...40 мм. Тензорезисторы наклеиваются на исследуемую деталь клеями БФ-2, ЦИАКРИН-30, целлулоидным и др. При нагружении детали ее деформация воспринимается проволочной решеткой, что сопровождается изменением сопротивления тензорезисторов на величину ΔR

$$\frac{\Delta R}{R} = S_X \varepsilon_X + S_Y \varepsilon_Y,$$

где ε_X , ε_Y – относительные деформации в направлениях *X* и *Y*; S_X , S_Y – коэффициенты продольной и поперечной тензочувствительности тензорезистора ($S_X > S_Y$).

Чувствительность тензорезистора к поперечным деформациям связана с наличием на концах петель закруглений. Чем меньше доля закругленных участков в проволочной решетке, тем меньше влияние поперечной деформации, поэтому для тензорезисторов с базой $l \geq 5$ мм поперечную тензочувствительность S_Y не учитывают.

Фольговые тензорезисторы (рис. 7.8,*б*) изготавливают из константовой фольги методом фототравления. Преимущества таких тензорезисторов заключаются в малой чувствительности к поперечной деформации благодаря широким перемычкам, а также

хорошей теплопередачей, что позволяет, с одной стороны, расширить диапазон рабочих температур, с другой – увеличить рабочий ток и тем самым повысить чувствительность электрической схемы, в которую включен тензорезистор.

Полупроводниковые тензорезисторы (рис. 7.8,в) представляют собой тонкую и узкую пластинку 1 из монокристаллов кремния или германия, вырезанную в определенном кристаллографическом направлении. По обоим концам пластинки закреплены короткие выводы из золотой проволоки 2, к концам которых приварены медные проводники 3. Основным преимуществом полупроводниковых тензорезисторов является высокий коэффициент тензочувствительности, достигающий до 200 и более, что позволяет измерять малые деформации без усиления выходного сигнала. Недостатками полупроводниковых тензорезисторов являются существенная зависимость их удельного сопротивления от кристаллографического направления, примесей и температуры, а также нестабильность чувствительности во времени.

Подробно тензометрический метод описан в [1, 4].

Измерение деформаций проводят с помощью тензометрической аппаратуры, к которой подключают тензорезисторы. К настоящему времени разработано несколько десятков видов аппаратуры, различающихся типом питания, количеством каналов, вспомогательными устройствами (усилителями, преобразователями цифровой информации, цифропечатью, дистанционным управлением, ЭВМ и др.).

Достаточно часто используется измерительная тензометрическая система СИИТ-3, которая имеет 100 каналов, т.е. позволяет выполнять измерения одновременно в 100 точках исследуемой конструкции в ручном и автоматическом режимах.

Перед проведением экспериментальных исследований проводится тарировка тензорезисторов с использованием балок равного сопротивления [4]. Тарировке обычно подвергается 3...5 % от партии тензорезисторов, в которой все тензорезисторы изготовлены по одной технологии и имеют малые отклонения по сопротивлению (не более $\pm 0,1 \dots 0,2$ Ом). Результаты тарировки распространяются на тензорезисторы всей партии.

Основной погрешностью при тензометрировании является температурная погрешность. Для исключения этой погрешности применяют температурную компенсацию. Для этого на пластинку, изготовленную из того же материала, что и исследуемый элемент

конструкции, наклеивают тензорезистор из этой же партии, помещают ее в те же температурные условия и подключают по мостовой схеме к тензометрической аппаратуре. При этом происходит компенсация температурных деформаций и напряжений при проведении экспериментов.

При исследовании напряженного состояния в элементах сложных конструкций, когда неизвестны направления главных напряжений, применяют розетки, состоящие из трех тензорезисторов, расположенных под углом 90° и 45° (рис. 7.9).

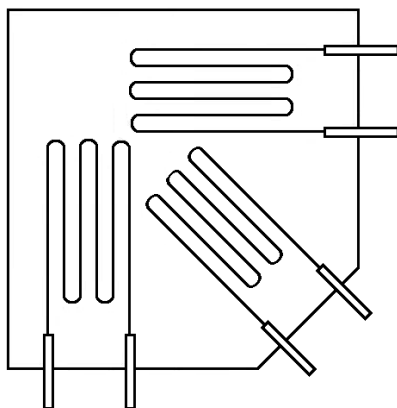


Рис. 7.9. Розетка из трех тензорезисторов

Тензометрический метод весьма широко применяется в экспериментальных исследованиях различных типов напряженных состояний элементов конструкций различного назначения [1, 4, 5].

7.6. Примеры исследования напряженно-деформированного состояния

Рассмотрим примеры анализа напряженно-деформированного состояния в элементах конструкций.

7.6.1. Анализ напряженного состояния в точке элемента конструкции

Покажем на примерах анализ напряженного состояния в точке K конструкции, выполненной из пластичного материала.

Пример 1

На рис. 7.10 в МПа показаны напряжения, действующие на гранях бесконечно малого элемента, выделенного в точке K .

Вычислить главные напряжения и эквивалентные напряжения по третьему и четвертому критериям прочности.

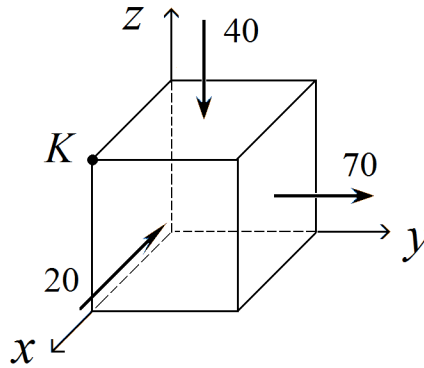


Рис. 7.10. Напряженное состояние в точке K

Так как на гранях элемента отсутствуют касательные напряжения, то его грани являются главными площадками, а напряжения, действующие на этих гранях, являются главными. В соответствии с правилами нумерации главных напряжений (7.3) получим их значения: $\sigma_1 = 70$ МПа; $\sigma_2 = -20$ МПа; $\sigma_3 = -40$ МПа.

Таким образом, в точке K имеет место объемное напряженное состояние. Вычислим эквивалентные напряжения по третьему (7.14) и четвертому (7.15) критериям прочности:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} &= \sigma_1 - \sigma_3 = 70 - (-40) = 110 \text{ МПа}; \\ \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(70 + 20)^2 + (70 + 40)^2 + (-20 + 40)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[90^2 + 110^2 + 20^2]} = 101,5 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} > \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}}$, что соответствует утверждению (7.16).

Так как третий критерий является приближительным, то оценим его погрешность в определении эквивалентных напряжений по сравнению с четвертым критерием. Погрешность третьего критерия в данном случае составляет

$$\delta = \frac{|\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} - \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}}|}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}}} 100\% = \frac{|110 - 101,5|}{101,5} 100\% = 8,4\%.$$

Известно, что в практических расчетах эквивалентных напряжений погрешность третьего критерия не превышает 15 %, что

является допустимым. Третий критерий прочности широко применяется в инженерной практике, так как позволяет проводить расчет эквивалентных напряжений в зоне прочности.

Пример 2

На рис. 7.11 показаны два варианта напряжений, действующих в точках K_1 и K_2 элемента конструкции. Определить для каждой точки вид напряженного состояния, если все напряжения, показанные на гранях элементов, одинаковы по величине и равны $\tau = 50$ МПа. Для упрощения рисунка на невидимых гранях элементов действующие напряжения не показаны.

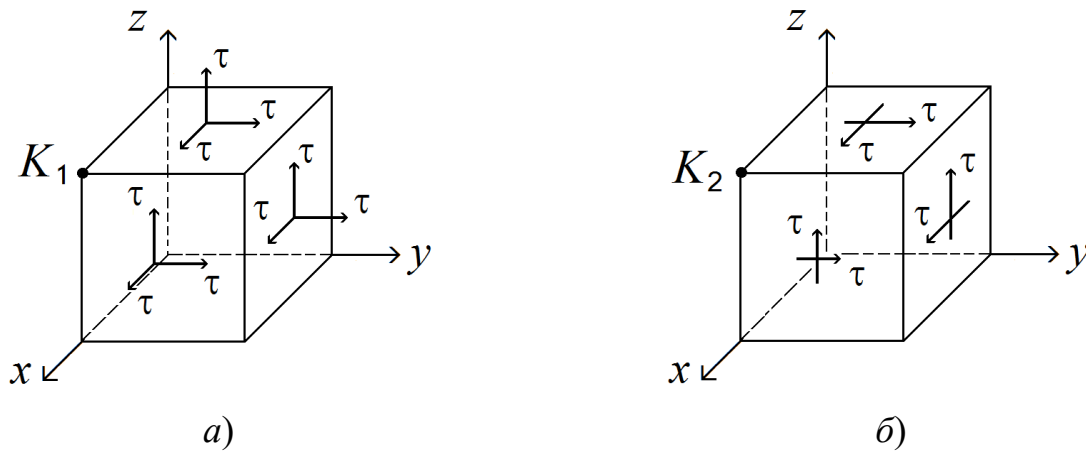


Рис. 7.11. Анализ напряженного состояния

1. Рассмотрим напряженное состояние в т. K_1 , показанное на рис. 7.11,а.

В соответствии с рис. 7.1 на гранях элемента действуют напряжения

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau.$$

Инварианты напряжений (7.5) равны

$$J_1 = \tau + \tau + \tau = 3\tau;$$

$$J_2 = \tau^2 + \tau^2 + \tau^2 - (\tau^2 + \tau^2 + \tau^2) = 0;$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{vmatrix} = 0.$$

Кубическое уравнение (7.4) в этом случае принимает вид

$$\sigma^3 - 3\tau\sigma^2 = 0$$

или

$$\sigma^2(\sigma - 3\tau) = 0.$$

Это уравнение имеет три корня:

$$\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = 0 \text{ и } \sigma_{(3)} = 3\tau.$$

Так как $\tau > 0$, то $\sigma_{(3)} > 0$.

В соответствии с правилом нумерации главных напряжений (7.3) производим перенумерацию корней уравнения и получаем значения главных напряжений

$$\sigma_1 = 3\tau = 150 \text{ МПа}; \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

В соответствии с определением (п. 7.1) в точке K_1 имеет место линейное напряженное состояние и при расчетах на прочность критерии прочности не используются.

2. Рассмотрим напряженное состояние в точке K_2 (рис. 7.11,б), где $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$; $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau$.

Инварианты напряжений (7.5) равны

$$J_1 = 0; J_2 = -3\tau^2;$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & \tau \\ \tau & \tau & 0 \end{vmatrix} = 0 + \tau^3 + \tau^3 - (0 + 0 + 0) = 2\tau^3.$$

Кубическое уравнение (7.4) принимает вид

$$\sigma^3 - 3\tau^2\sigma - 2\tau^3 = 0.$$

Преобразуем кубическое уравнение к виду

$$(\sigma^3 - \tau^2\sigma) - 2(\tau^2\sigma + \tau^3) = 0.$$

Выполним алгебраические преобразования этого уравнения

$$\sigma(\sigma^2 - \tau^2) - 2\tau^2(\sigma + \tau) = 0;$$

$$\sigma(\sigma - \tau)(\sigma + \tau) - 2\tau^2(\sigma + \tau) = 0;$$

$$(\sigma + \tau)[\sigma(\sigma - \tau) - 2\tau^2] = 0.$$

Полученное уравнение распадается на два уравнения:

1) $\sigma + \tau = 0$ и имеет корень $\sigma_{(1)} = -\tau$;

2) $\sigma(\sigma - \tau) - 2\tau^2 = 0$.

Это квадратичное уравнение $\sigma^2 - \tau\sigma - 2\tau^2 = 0$, корни которого определяются по формуле

$$\sigma_{(2,3)} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 + 8\tau^2}}{2} = \frac{\tau \pm 3\tau}{2}.$$

Отсюда получены еще два корня уравнения

$$\sigma_{(2)} = 2\tau; \sigma_{(3)} = -\tau.$$

В соответствии с правилом нумерации главных напряжений (7.3) получим значения главных напряжений для точки K_2 (рис. 7.11,б)

$$\sigma_1 = 2\tau; \sigma_2 = \sigma_3 = -\tau.$$

Таким образом, в точке K_2 имеет место объемное напряженное состояние и при расчетах на прочность в этой точке необходимо применить соответствующий критерий прочности.

Например, если материал является пластичным, то применяя третий критерий (7.14), получим

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau - (-\tau) = 3\tau = 3 \cdot 50 = 150 \text{ МПа}.$$

Если применить четвертый критерий (7.16), то получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(2\tau + \tau)^2 + (2\tau + \tau)^2 + (-\tau + \tau)^2 \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(3\tau)^2 + (3\tau)^2 \right]} = \sqrt{9\tau^2} = 3\tau = 150 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Из рассмотренного примера следует, что $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}}$, что соответствует утверждению (7.16).

7.6.2. Анализ напряженно-деформированного состояния резервуара

Покажем применение обобщенного закона Гука к анализу НДС реальной конструкции.

Рассмотрим цилиндрический замкнутый герметичный стальной сосуд, который находится под действием внутреннего избыточного давления p (рис. 7.12,а). Сосуд имеет сферические днища.

Сосуд имеет внешний диаметр $D = 300$ мм, толщину стенки $h = 2$ мм. Материал сосуда – сталь с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$.

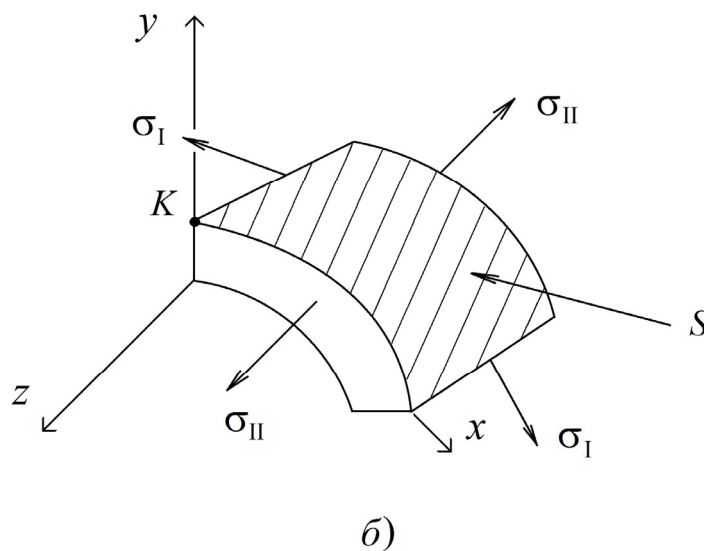
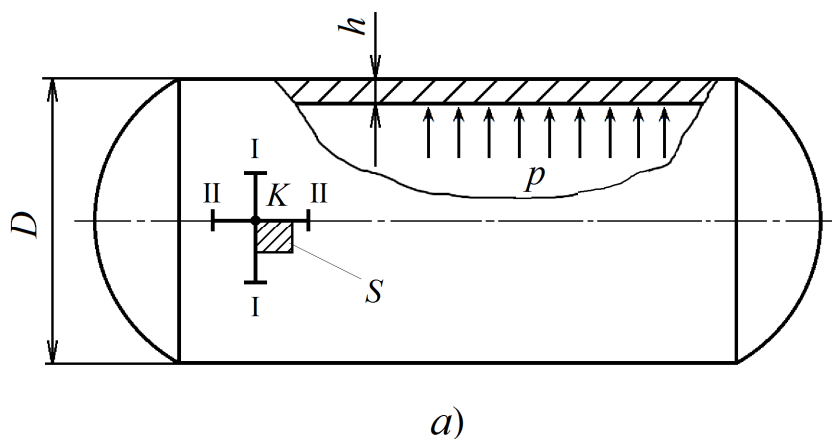


Рис. 7.12. Анализ НДС сосуда

На внешней поверхности цилиндрической части сосуда (в точке K) по окружности и по продольной оси z наклеены тензорезисторы [1, 4] I и II соответственно. Эти тензорезисторы при испытаниях сосуда давлением p зафиксировали относительные деформации:

- окружную деформацию $\varepsilon_I = 10 \cdot 10^{-4}$;
- осевую деформацию $\varepsilon_{II} = 2,35 \cdot 10^{-4}$.

Требуется определить, при каком избыточном давлении p проводились испытания.

Решение

Для решения этой задачи необходимо проанализировать НДС в исследуемой точке K , где наклеены тензорезисторы (рис. 7.12,а). Для этого выделим возле точки K бесконечно малый элемент (рис. 7.12,б) и покажем напряжения, которые действуют на его гранях по направлению осей тензорезисторов: σ_I – окружные напряже-

ния; σ_{II} – осевые напряжения. Так как давление является внутренним, то эти напряжения являются растягивающими, т.е. $\sigma_I > 0$, $\sigma_{II} > 0$. На внешней поверхности S (она заштрихована на рис. 7.12,б) напряжения, нормальные к ней, отсутствуют, т.е. $\sigma_y = 0$.

Так как конструкция и действующая нагрузка являются симметричными относительно оси z , то на боковых гранях элемента (рис. 7.12,б) не возникает касательных напряжений и все грани показанного элемента являются главными площадками. Следовательно, напряжения σ_I , σ_{II} , σ_y и измеренные деформации ε_I и ε_{II} являются главными. Так как $\varepsilon_I > \varepsilon_{II}$ (получено при испытаниях), то очевидно и $\sigma_I > \sigma_{II}$. Так как третье нормальное напряжение, действующее на площадке S элемента равно нулю, то, принимая правило нумерации главных напряжений (7.3), получим

$$\sigma_1 = \sigma_I; \sigma_2 = \sigma_{II}; \sigma_3 = 0.$$

Таким образом, в точке K имеет место плоское напряженное состояние (при $\sigma_3 = 0$), для которого обобщенный закон Гука (7.7) имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2), \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1), \\ \varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E}(\sigma_1 - \sigma_2). \end{cases} \quad (7.34)$$

Здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_I = 10 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_2 = 2,35 \cdot 10^{-4}$. Существенной особенностью является то, что $\sigma_3 = 0$, а $\varepsilon_3 \neq 0$, так как имеет место поперечная деформация сжатия стенки сосуда.

Решая систему первых двух линейных уравнений (7.34) относительно известных главных деформаций ε_1 и ε_2 , получим выражения для искомых главных напряжений в точке K

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2} (10 \cdot 10^{-4} + 0,32 \cdot 2,35 \cdot 10^{-4}) = 236 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2} (2,35 \cdot 10^{-4} + 0,3 \cdot 10 \cdot 10^{-4}) = 118 \text{ МПа}.$$

Обратим внимание на то, что в цилиндрической части окружные напряжения σ_1 в два раза больше, чем осевые σ_2 напряжения ($\sigma_1 = 2\sigma_2$). Это указывает на то, что для увеличения прочности конструкции следует вводить кольцевые ребра жесткости для уменьшения окружных напряжений.

Определим величину действующего при испытаниях давления p . Для этого применим метод сечений для всего сосуда. Рассекаем его на две части и рассматриваем равновесие отсеченной части под действием всех силовых факторов (рис. 7.13).

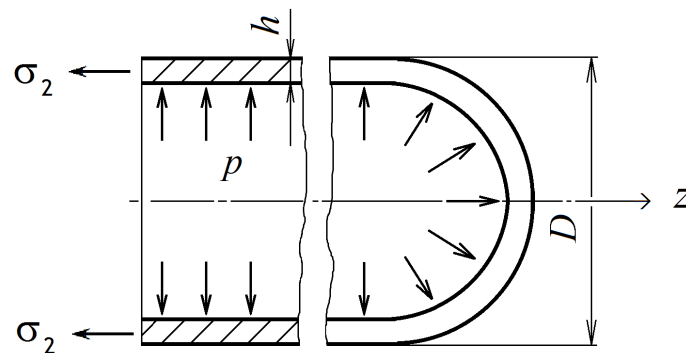


Рис. 7.13. Применение метода сечений

Уравнение равновесия для отсеченной части сосуда (сумма проекций всех сил на ось z) записывается в виде

$$pF_d - \sigma_2 F_k = 0. \quad (7.35)$$

Здесь $F_d = \frac{\pi D^2}{4}$ – площадь днища; $F_k = \pi D h$ – площадь кольцевого сечения, на которую действует осевое напряжение σ_2 . Решая уравнение (7.35) относительно искомого давления p , получим

$$p = \sigma_2 \frac{F_k}{F_d} = \sigma_2 \frac{\pi D h}{\pi D^2 / 4} = 4 \sigma_2 \frac{h}{D}. \quad (7.36)$$

С учетом полученных числовых значений из (7.36) получим величину избыточного давления

$$p = 4 \cdot 118 \frac{2}{300} = 3,15 \text{ МПа}$$

или $p = 31,5$ атм.

7.7. Контактные напряжения

Напряжения и деформации, возникающие при взаимном контакте двух соприкасающихся упругих тел, называются контактными. При этом передача давления от одного тела к другому происходит по малой площадке контакта [3, 8].

7.7.1. Анализ напряженно-деформированного состояния в зоне контакта

На рис. 7.14,*а* показаны два контактирующих упругих тела, сжатых усилиями N .

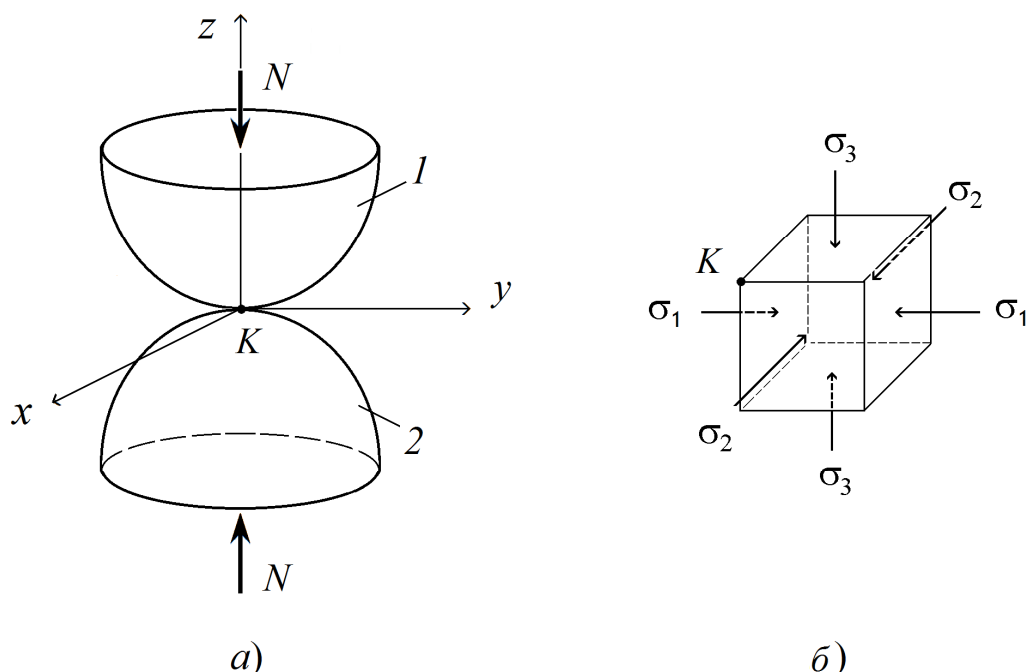


Рис. 7.14. Напряжения в зоне контакта тел

Исследования НДС в зоне контакта показали, что материал в зоне контакта находится в объемном напряженном состоянии в условиях всестороннего сжатия, как это показано на рис. 7.14,*б* для бесконечно малого элемента, выделенного в точке контакта K .

Контактные напряжения носят местный характер и быстро убывают по мере удаления от площадки контакта.

Контактным напряжениям следует уделять особое внимание при расчетах на прочность таких деталей, как шариковые и роликовые подшипники, зубчатые колеса и в иных случаях контактирования различных элементов конструкций.

Так как контактирующие элементы обычно изготавливают из пластичных материалов, то при расчетах на прочность и анализе

НДС в зоне контакта применяют третий или четвертый критерий прочности.

Точное решение контактной задачи для упругих тел с гладкой поверхностью впервые дано Герцем. Решение получено методами теории упругости. Ниже приведем полученные результаты анализа НДС в зоне контакта.

В общем случае площадка контакта представляет собой внутреннюю область эллипса с полуосями a и b (рис. 7.15,а) и имеет площадь контакта

$$F_k = \pi ab. \quad (7.37)$$

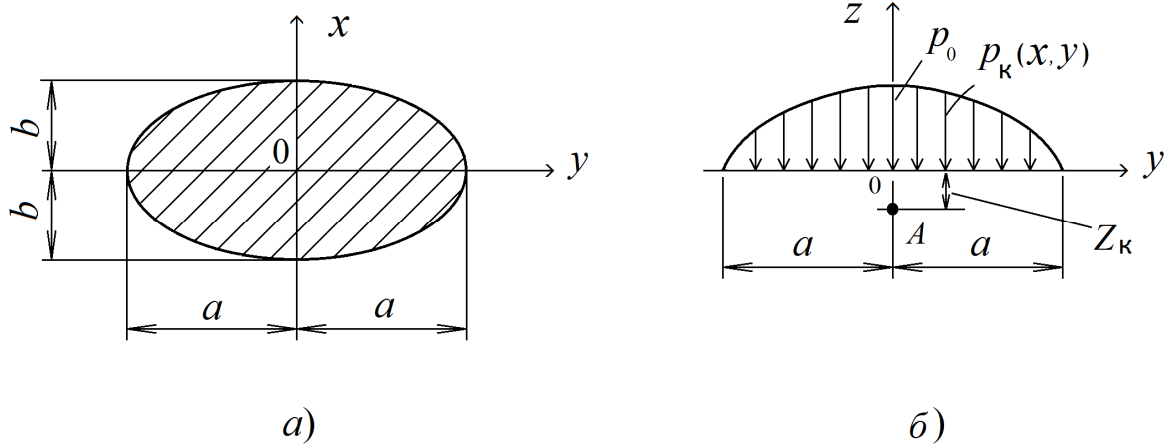


Рис. 7.15. Площадка контакта (а);
распределение контактного давления по ней (б)

Контактное давление $p_k(x,y)$ в общем случае распределяется по эллиптическому закону (рис. 7.15,б) и достигает своего максимального значения p_0 в центре площадки контакта. В частных случаях контактирующих тел эллиптическая площадка контакта трансформируется в более простые фигуры.

Например, при контакте двух сферических тел площадка контакта является кругом радиуса a , а контактное давление распределяется по сферическому закону [8]

$$p(x,y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}}. \quad (7.38)$$

При контакте двух цилиндрических тел длиной l с параллельными осями (рис. 7.16,а), сжатыми равномерно распределенной по длине контактирующего тела $N = P/l$, контактная площадка является прямоугольной полосой с полушириной b (рис. 7.16,б).

Контактное давление при этом постоянно по длине l , а по ширине контактной площадки распределяется по закону [8]

$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}. \quad (7.39)$$

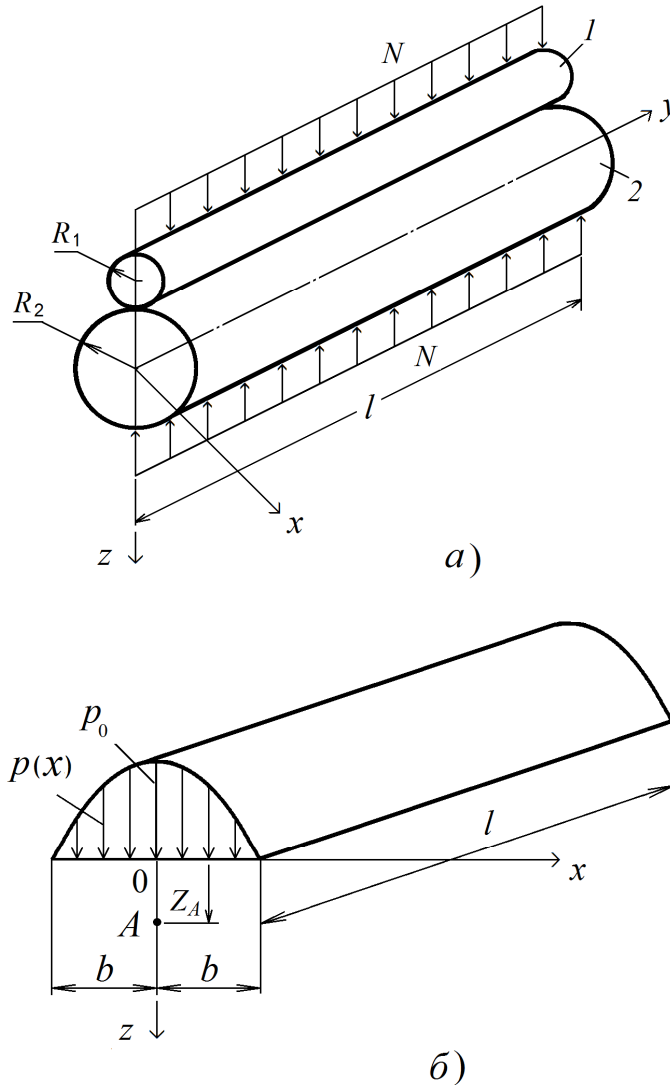


Рис. 7.16. Схема контактирования двух цилиндрических тел радиусами R_1 и R_2

Анализ напряженно-деформированного состояния, проведенный для контакта упругих тел, имеющих различную геометрию, показал, что максимальные эквивалентные напряжения, рассчитанные по третьему или четвертому критериям прочности, расположены не на поверхности площадке контакта, а на некоторой глубине в точке A , положение которой характеризуется координатой Z_A (рис. 7.15,б, 7.16,б). Установлено, что значение координаты Z_A зависит от отношения полуосей a/b площадки контакта.

7.7.2. Расчет на прочность при контактном взаимодействии

В табл. 7.1 для наиболее характерных схем контактирования упругих тел приведены формулы и соотношения для определения размеров площадки контакта (a и b) и сближения h контактирующих тел.

В табл. 7.1 приняты следующие обозначения: R_1, R_2 – радиусы контактирующих тел; $\theta = \theta_1 + \theta_2$ – приведенная упругая постоянная контактирующих тел; $\theta_j = \frac{1 - \mu_j^2}{E_j}$, $j = 1, 2$ соответствует номеру контактирующего тела; μ_j и E_j – коэффициент Пуассона и модуль упругости j -го контактирующего тела.

Если контактирующие тела изготовлены из одного и того же материала, то в расчетных соотношениях следует положить $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

В тех случаях, когда в зоне контакта максимальные эквивалентные напряжения $\max \sigma_{\text{экр}}$ не превышают предела упругости σ_y для материалов контактирующих тел, т.е. выполняется условие

$$\max \sigma_{\text{экр}} \leq \sigma_y,$$

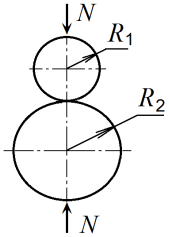
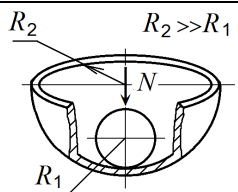
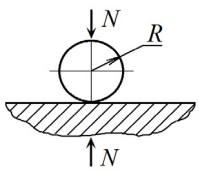
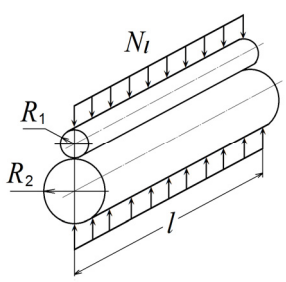
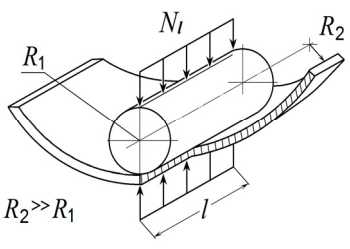
контакт является упругим. В этом случае напряжения, возникающие в зоне контакта, могут быть рассчитаны по формулам теории упругости [9], основанным на решении и обобщении задач Герца, Буссинеска и Фламанга. При этом упругие деформации определяются через главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в соответствии с обобщенным законом Гука.

При упругом контакте форма и размеры контактной площадки зависят от геометрии контактирующих тел. Закон распределения контактного давления p на площадке контакта, а также распределение контактных напряжений и деформаций существенно зависят от геометрии и физико-механических свойств материалов контактирующих тел.

Проведенный анализ НДС в зоне контакта показывает, что контактные напряжения являются нелинейными функциями нагрузки N , а темп роста контактных напряжений отстает от темпа увеличения сжимающей нагрузки. Это объясняется тем, что с увеличением сжимающей нагрузки N увеличиваются и размеры контактной площадки (a и b).

Таблица 7.1

Расчетные формулы для контактирующих тел

Но- мер схемы	Форма контактирующих тел и их взаимное расположение	Размеры площадки контакта a, b	Сближение h
1		$a = b = 0,9086 \times \sqrt[3]{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \theta N}$	$0,8255 \sqrt[3]{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \theta^2 N^2}$
2		$a = b = 0,9086 \times \sqrt[3]{\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \theta N}$	$0,8255 \sqrt[3]{\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \theta^2 N^2}$
3		$a = b = 0,9086 \sqrt[3]{R \theta N}$	$0,8255 \sqrt[3]{\frac{1}{R} \theta^2 N^2}$
4		$b = 1,128 \times \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \theta N_l}$	$\frac{2N_l}{\pi} \left[\theta_1 \left(\ln \frac{2R_1}{b} + 0,407 \right) + \theta_2 \left(\ln \frac{2R_2}{b} + 0,407 \right) \right]$
5		$b = 1,128 \times \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \theta N_l}$	$\frac{2N_l}{\pi} \left[\theta_1 \left(\ln \frac{2R_1}{b} + 0,407 \right) + \theta_2 \left(\ln \frac{2R_2}{b} + 0,407 \right) \right]$

В табл. 7.2 для упрощения расчетов даны значения максимального давления p_0 на площадке контакта, значения максимальных эквивалентных напряжений в наиболее нагруженной точке A ($\max \sigma_{\text{экв}}$) и координата этой точки Z_A . При этом номера расчетных схем нагружения в табл. 7.2 и 7.1 совпадают. Расчет максимальных эквивалентных напряжений выполнен по третьему критерию прочности при среднем значении коэффициента Пуассона для материала контактирующих тел $\mu = 0,3$.

Таблица 7.2

Расчетные формулы для определения контактных напряжений

Схема нагружения по табл. 7.1	Максимальное контактное давление p_0	Максимальные напряжения $\max \sigma_{\text{экв}}$	Координата Z_A
1	$0,5784 \sqrt[3]{N \theta^{-2} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^2}$	$0,62 p_0$	$0,48a$
2	$0,5784 \sqrt[3]{N \theta^{-2} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)^2}$	$0,62 p_0$	$0,48a$
3	$0,5784 \sqrt[3]{N R^{-2} \theta^{-2}}$	$0,62 p_0$	$0,48a$
4	$0,5642 \sqrt[3]{N_l \theta^{-1} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^2}$	$0,60 p_0$	$0,786b$
5	$0,5642 \sqrt[3]{N_l \theta^{-1} \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \right)^2}$	$0,60 p_0$	$0,786b$

Проведенный анализ НДС в зоне контакта показал, что пластическое течение зарождается в материале с меньшей твердостью (с меньшим пределом текучести). Зона пластичности образуется на глубине Z_A в точке A под площадкой контакта (см. рис. 7.15,б и 7.16,б). Эта зона достаточно мала по размерам и окружена упругой зоной. С ростом контактного давления пластическая зона расширяется, занимая все больший объем контактирующих тел. В этом случае имеет место стесненная упругопластическая стадия деформирования, которая завершается выходом пластической зоны на поверхность тел в зоне контактной площадки.

Значения максимальных эквивалентных напряжений в наиболее нагруженной точке A (рис. 7.15,б) зависят от отношения b/a и их можно определять по формуле [8]

$$\max \sigma_{\text{экв}} = m p_0. \quad (7.40)$$

Здесь m – коэффициент, величина которого зависит от отношения b/a и выбранного критерия прочности. Значения коэффициента m приведены в табл. 7.3

Таблица 7.3

Значения коэффициента m

b/a	Форма площадки контакта	Значения m	
		Применяемый критерий	
		третий	четвертый
1	Круг	0,620	0,620
0,75	Эллипс	0,625	0,617
0,5	Эллипс	0,649	0,611
0,25	Эллипс	0,646	0,587
0	Полоса	0,600	0,557

Таким образом, условие прочности при контактном взаимодействии записывается в виде

$$\max \sigma_{\text{экв}} = m p_0 \leq [\sigma_k]. \quad (7.41)$$

Сформулируем порядок расчета на прочность контактирующих элементов:

- вычислить размеры площадки контакта a и b , координату наиболее нагруженной точки Z_A и максимальное контактное давление p_0 (см. табл. 7.1);
- выбрать критерий прочности, по табл. 7.2 определить значение коэффициента m и максимальные эквивалентные контактные напряжения $\max \sigma_{\text{экв}}$;
- по формуле (7.41) проверить выполнение условия прочности.

При расчете роликовых и шариковых подшипников рекомендуется принимать допускаемые контактные напряжения $[\sigma_k] = 3500 \dots 5000$ МПа.

В табл. 7.4 приведены значения максимальных допускаемых контактных напряжений на площадке контакта при начальном контакте по линии (при $m = 0,557$), что соответствует, например, расчетным схемам 4 и 5 (см. табл. 7.1, 7.2), т.е. контакту цилиндрических тел с параллельными осями. В случае если первоначальный контакт осуществили в точке, что соответствует расчетным схемам 1–3 в табл. 7.1, 7.2, то значения допускаемых контактных напряжений, приведенные в табл. 7.4, следует увеличить в 1,3–1,4 раза.

Таблица 7.4

Допускаемые контактные напряжения $[\sigma_k]$ при первоначальном контакте по линии при статическом нагружении

Материал	Предел прочности σ_b , МПа	Твердость по Бринеллю, НВ	Допускаемое контактное напряжение $[\sigma_k]$, МПа
Сталь			
30	480...600	180	850...1050
40	570...700	200	1000...1350
50	630...800	230	1050...1400
50Г	650...850	240	1100...1450
15Х	620...750	240	1050...1600
20Х	800...850	240	1200...1450
15ХФ	1600...1800	240	1350...1600
ШХ15	—	—	≤ 3800
Чугун			
СЧ21	960	180...207	800...900
СЧ24	1000	187...218	900...1000
СЧ28	1100	170...241	1000...1100
СЧ32	1200	170...241	1100...1200
СЧ35	1300	197...255	1200...1300
СЧ38	1400	197...255	1300...1400

Для других расчетных схем контактирования расчетные формулы для определения a , b и p_0 приведены в [3].

Если поверхности контактирующих тел являются шероховатыми, то анализ НДС в зоне контакта существенно усложняется и его выполняют по методике, изложенной в [10], которая учитывает параметры шероховатостей контактирующих поверхностей и упругопластические свойства их материалов.

7.7.3. Пример расчета контактных напряжений

В качестве примера исследуем НДС в зоне контакта сферы с полупространством (см. расчетную схему 3 в табл. 7.1).

Материал обоих контактирующих тел – Сталь 40 с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$ и пределом текучести σ_t . Радиус сферического тела $R_1 = R = 40$ мм. Сжимающее усилие $P = 8$ кН = $8 \cdot 10^3$ Н.

Решение

Приведенная упругая постоянная равна

$$\theta = 2 \frac{1-\mu^2}{E} = 2 \frac{1-0,3^2}{2 \cdot 10^5} = 0,91 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}.$$

Контактная площадка является кругом с радиусом

$$a = 0,909 \sqrt[3]{R\theta P} = 0,909 \sqrt[3]{40 \cdot 0,91 \cdot 10^{-5} \cdot 8 \cdot 10^3} = 1,3 \text{ мм}.$$

Максимальное контактное давление в центре контактной площадки (см. табл. 7.2) равно

$$p_0 = 0,578 \sqrt[3]{\frac{P}{R^2 \theta^2}} = 0,578 \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10^3}{40^2 \cdot (0,91 \cdot 10^{-5})^2}} = 491,4 \text{ МПа}.$$

Координата залегания наиболее нагруженной точки в полу-пространстве (см. табл. 7.2) равна

$$Z_A = 0,48a = 0,48 \cdot 1,3 = 0,624 \text{ мм}.$$

Так как $a = b$, то отношение $b/a = 1$, и в соответствии с табл. 7.3 и по третьему и по четвертому критериям получим значение коэффициента $m = 0,62$.

В этом случае максимальные эквивалентные напряжения в наиболее нагруженной точке (7.40) равны

$$\max \sigma_{\text{эКВ}} = m p_0 = 0,62 \cdot 491,4 = 304,7 \text{ МПа}.$$

Для материала Сталь 40 (прил. 1) предел текучести

$$\sigma_T = 340 \text{ МПа}.$$

Так как $\max \sigma_{\text{эКВ}} < \sigma_T$, то все деформации в области контакта являются упругими.

Контрольные вопросы

1. Какие напряжения называются главными?
2. Укажите существующие типы напряженных состояний.
3. Как определяются главные напряжения?
4. Какое напряженное состояние имеет место при кручении валов?
5. Сформулируйте закон парности касательных напряжений.
6. Какое напряженное состояние имеет место при изгибе с кручением?
7. Что такое эквивалентные напряжения?

8. Как записывается условие прочности при сложном напряженном состоянии?
9. Сформулируйте критерии прочности для хрупких материалов. Объясните их физический смысл.
10. Сформулируйте третий критерий прочности. Укажите его достоинства и недостатки.
11. Сформулируйте четвертый критерий прочности.
12. Сравните третий и четвертый критерии прочности между собой. Укажите области их применения.
13. Запишите обобщенный закон Гука для сложного напряженного состояния.
14. Запишите обобщенный закон Гука для плоского напряженного состояния.
15. В каких случаях валы подвергаются действию изгиба с кручением?
16. Запишите формулы для вычисления эквивалентных моментов по третьему и четвертому критериям прочности.
17. Сформулируйте порядок расчета на прочность при изгибе с кручением вала.
18. Как вычисляются главные напряжения в общем случае плоского напряженного состояния?
19. Чему равны главные напряжения при кручении валов?
20. Чему равны главные напряжения при изгибе с кручением валов?
21. Запишите формулы для вычисления эквивалентных напряжений по третьему и четвертому критериям при изгибе с кручением валов.
22. Какие напряжения называются контактными? Приведите примеры конструктивных элементов, в которых возникают контактные напряжения.
23. Какие геометрические формы имеют контактные площадки? Приведите примеры.
24. Как распределяется контактное давление по контактной площадке?
25. Где расположена наиболее нагруженная точка при контакте двух упругих тел?
26. Запишите условие прочности в зоне контакта двух упругих тел.
27. Сформулируйте порядок расчета на прочность в зоне контакта упругих тел.

28. Какие физико-механические параметры контактирующих тел определяют величину эквивалентных напряжений в зоне контакта?

29. Зависит ли глубина залегания наиболее нагруженной точки в зоне контакта от значений физико-механических характеристик контактирующих тел?

30. Какое напряженно-деформированное состояние возникает в зоне контакта упругих тел?

31. В чем суть метода лаковых покрытий?

32. Расскажите суть оптического метода экспериментальных исследований.

33. Достоинства и недостатки рентгеновского метода определения напряжений.

34. Достоинства и недостатки тензометрического метода.

35. Опишите принцип работы тензорезистора.

36. Для чего проводится тарировка тензорезисторов?

37. Для чего применяют термокомпенсацию при тензометрировании?

38. В каких случаях применяют розетки тензорезисторов?

8. Динамическое действие нагрузок

8.1. Основные понятия

Природа динамических воздействий на элементы и конструкции является весьма разнообразной [1, 2]. Рассмотрим основные виды динамического воздействия:

- действие ускорений;
- удар;
- вибрация.

Существенной особенностью действия динамической нагрузки является то, что при расчете нельзя пренебрегать силами инерции, возникающими в элементах конструкций. Силы инерции выступают как дополнительная внешняя нагрузка. Их взаимодействие с силами упругости часто порождает возникновение колебаний элементов конструкций, которые могут приводить к многократному росту внутренних силовых факторов и, соответственно, напряжений и деформаций элементов конструкций.

Кроме того, при действии динамической нагрузки ряд конструкционных материалов проявляют склонность к охрупчиванию, хотя при действии статических нагрузок они являются пластичными [1].

Расчет на прочность при действии динамических нагрузок является достаточно сложным [1, 3], поэтому будем рассматривать простейшие схемы динамического нагружения типовых элементов конструкций. При этом полагаем, что динамическое нагружение конструкции происходит в упругой области, т.е. напряженно-деформированное состояние элементов конструкции подчиняется закону Гука.

В этом случае динамическое действие нагрузки характеризуется коэффициентом динамичности $k_d > 1$, который показывает, во сколько раз увеличиваются напряжения и деформации в элементе конструкции при действии динамической нагрузки по сравнению с действием той же нагрузки, но приложенной статически.

Таким образом, напряжения σ_d , деформации ϵ_d и перемещения Δ_d при динамическом действии нагрузки вычисляются по формулам

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст}; \quad \epsilon_d = k_d \epsilon_{ст}; \quad \Delta_d = k_d \Delta_{ст}. \quad (8.1)$$

Здесь $\sigma_{ст}$, $\epsilon_{ст}$, $\Delta_{ст}$ – статические напряжения, относительные деформации и перемещения соответственно. Величина коэффици-

ента динамичности k_d рассчитывается для каждого конкретного элемента конструкции и определяется выражениями, зависящими от вида динамической нагрузки.

Условие прочности в этом случае записывается в виде

$$\max \sigma_d \leq [\sigma_d], \quad (8.2)$$

где $\max \sigma_d$ – максимальные динамические напряжения в элементе конструкции; $[\sigma_d]$ – допускаемые напряжения при динамическом нагружении, величина которых зависит от свойств материала при динамической нагрузке и условий эксплуатации конструкции.

П р и м е ч а н и е. Если напряженное состояние элемента конструкции является сложным, то расчет ведется по эквивалентным напряжениям, которые рассчитываются по соответствующему критерию прочности.

8.2. Расчет коэффициента динамичности

Рассмотрим простейшие виды динамического нагружения.

8.2.1. Действие линейных ускорений

Пусть груз весом Q на тросе поднимается с ускорением a (рис. 8.1).

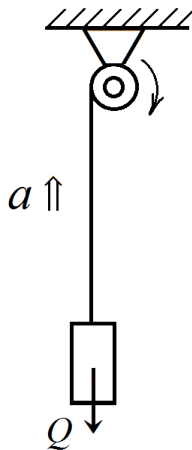


Рис. 8.1. Расчетная схема

В этом случае дополнительно к весу Q на трос действует сила инерции от груза. Коэффициент динамичности определяется выражением

$$k_d = 1 + \frac{a}{g}, \quad (8.3)$$

где g – ускорение свободного падения ($g = 9,8 \text{ м/с}^2$).

Статическое напряжение растяжения в тросе равно

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{Q}{F}, \quad (8.4)$$

где F – площадь поперечного сечения троса.

Динамические напряжения определяются по формуле (8.1), а условие прочности имеет вид (8.2).

8.2.2. Действие удара

Пусть на упругую систему с высоты H падает груз весом Q . На рис. 8.2,*а* показан продольный осевой удар, а на рис. 8.2,*б, в* – поперечный удар по балке.

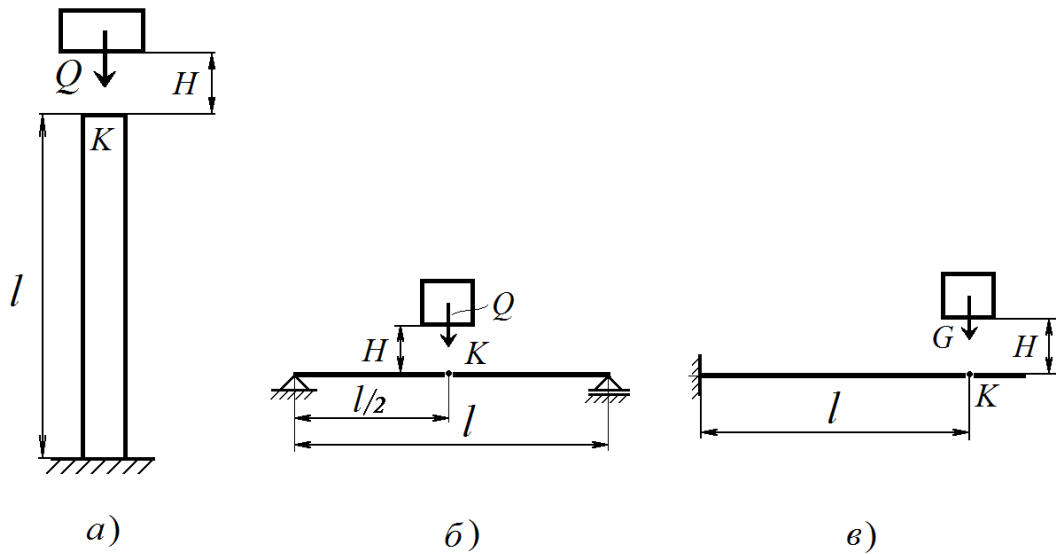


Рис. 8.2. Расчетные схемы при действии удара:
а – продольный осевой удар; *б, в* – поперечный удар

Во всех случаях коэффициент динамичности определяется выражением

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\alpha \Delta_{\text{ст}}}}. \quad (8.5)$$

Здесь коэффициент α учитывает вес элемента конструкции (стержня, балки), по которому производится удар (рис. 8.2). Этот коэффициент вычисляется по формуле

$$\alpha = 1 + \frac{Q_{\text{э}}}{Q} \beta_{\text{п}}, \quad (8.6)$$

где $Q_{\text{э}}$ – вес элемента конструкции (стержня, балки), а $\beta_{\text{п}}$ – коэффициент приведения массы элемента к точке, в которой произво-

дится удар (к точке K). Этот коэффициент $\beta < 1$, а его величина зависит от координат точки приложения удара и расчетной схемы элемента [1, 3].

Например, при продольном ударе (см. рис. 8.2,а) этот коэффициент принимает значение $\beta_{\text{п}} = 1/3$.

При поперечном ударе:

- для расчетной схемы (см. рис. 8.2,б) $\beta_{\text{п}} = \frac{17}{35} \approx 0,486$;
- для расчетной схемы (см. рис. 8.2,в) $\beta_{\text{п}} = \frac{33}{140} = 0,236$.

Для остальных расчетных схем значения коэффициента приведения можно найти в [3].

В тех случаях, когда вес элемента конструкции существенно меньше веса падающего груза ($Q_{\text{э}} \ll Q$), выполняется условие $\frac{Q_{\text{э}}}{Q} \beta_{\text{п}} \ll 1$ и коэффициент α принимают равным единице, т.е. $\alpha = 1$, а балку считают невесомой. В этом случае формула (8.5) принимает вид

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{\text{ст}}}}. \quad (8.7)$$

Если выполняется условие $\frac{2H}{\alpha \Delta_{\text{ст}}} \gg 1$, то возможно дальнейшее упрощение и тогда применяют приближенную формулу для определения коэффициента динамичности

$$k_{\text{д}} \approx \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{\text{ст}}}}. \quad (8.8)$$

Применительно к расчетным схемам, показанным на рис. 8.2, $\Delta_{\text{ст}}$ определяется следующим образом:

- при продольном ударе (рис. 8.2,а) $\Delta_{\text{ст}} = \frac{Ql}{EF}$;
- при поперечном ударе (рис. 8.2,б,в) $\Delta_{\text{ст}}$ определяется как прогиб точки K при приложении к ней статической силы, равной Q . Этот прогиб определяется любым методом, например методом начальных параметров (см. п. 5.2).

Динамические напряжения определяются выражением (8.1), а условие прочности для наиболее нагруженного поперечного сечения элемента конструкции записывается в виде (8.2).

8.2.3. Действие вибрации

При действии внешних вибрационных нагрузок в элементах конструкции имеет место динамическое воздействие, что приводит к повышению напряжений, деформаций и перемещений упругой системы.

Расчет стержней, валов и балок на действие вибрации является достаточно сложным и здесь не рассматривается [1, 3]. Будем рассматривать расчетные схемы типовых элементов конструкций как одномассовые колебательные системы, у которых вся масса сосредоточена в одной точке.

В качестве примера рассмотрим поперечные колебания двухопорной балки с грузом массой M , расположенным в сечении K (рис. 8.3). Пунктиром показана форма поперечных колебаний балки.

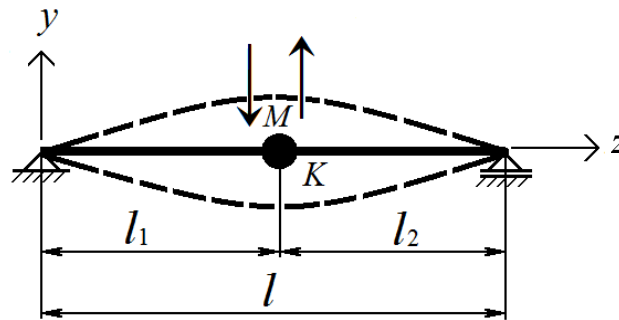


Рис. 8.3. Поперечные колебания балки

Считаем, что балка невесома, а груз имеет массу M . Собственная частота ω балки в этом случае определяется выражением [1]

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}}, \quad (8.9)$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения; $\Delta_{\text{ст}}$ – перемещение сечения K при статическом нагружении балки усилием, равным весу груза массой M (рис. 8.3).

Необходимо отметить, что собственная частота ω , определенная таким образом, соответствует основной (наименьшей) собственной частоте упругой системы, на которой, как правило, возникают наибольшие перемещения и напряжения.

При действии на балку внешней гармонической вибрации с частотой θ по направлению оси y в балке возникают вынужденные колебания. При совпадении частот вынужденных θ и собственных ω колебаний в системе возникает резонанс, при котором

происходит максимальное увеличение динамических напряжений σ_d и перемещений Δ_d в сечениях балки, которые вычисляются по формулам (8.1).

При динамических расчетах на вибрацию вводится понятие динамического коэффициента β , который часто называют коэффициентом нарастания вынужденных колебаний и определяют по формуле [1]

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2n}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}}, \quad (8.10)$$

где безразмерный параметр $\frac{2n}{\omega}$ характеризует рассеяние энергии и затухание колебаний в элементе конструкции. Для реальных элементов конструкций, работающих на изгиб, этот параметр принимает значения $\theta \leq \frac{2n}{\omega} < 0,4$.

Динамический коэффициент характеризует увеличение динамических напряжений за счет действия внешней гармонической силы с амплитудой P . Например, если в точке K балки (рис. 8.3) установлен электродвигатель, то при его работе на балку в точке K будут действовать две составляющие внешних нагрузок:

- вес электродвигателя Q , который является постоянным;
- инерционная сила с амплитудой P , которая является переменной, вызывает колебания балки и определяется величиной дисбаланса вращающихся частей ротора электродвигателя.

На рис. 8.4 показаны зависимости динамического коэффициента β от отношения частот $\frac{\theta}{\omega}$ при различных значениях параметра $\gamma = \frac{2n}{\omega}$, характеризующего демпфирование в упругой системе.

Из рис. 8.4 следует, что при резонансе происходит резкое возрастание амплитуд колебаний, что в свою очередь вызывает повышение напряжений в балке.

Областью резонанса обычно считают частотный диапазон внешних воздействий (рис. 8.4)

$$0,7\omega \leq \theta \leq 1,3\omega. \quad (8.11)$$

В связи с этим при проектировании элементов конструкций желательно за счет конструктивных мер обеспечивать выполнение условий $\frac{\theta}{\omega} < 0,7$ и $\frac{\theta}{\omega} > 1,3$.

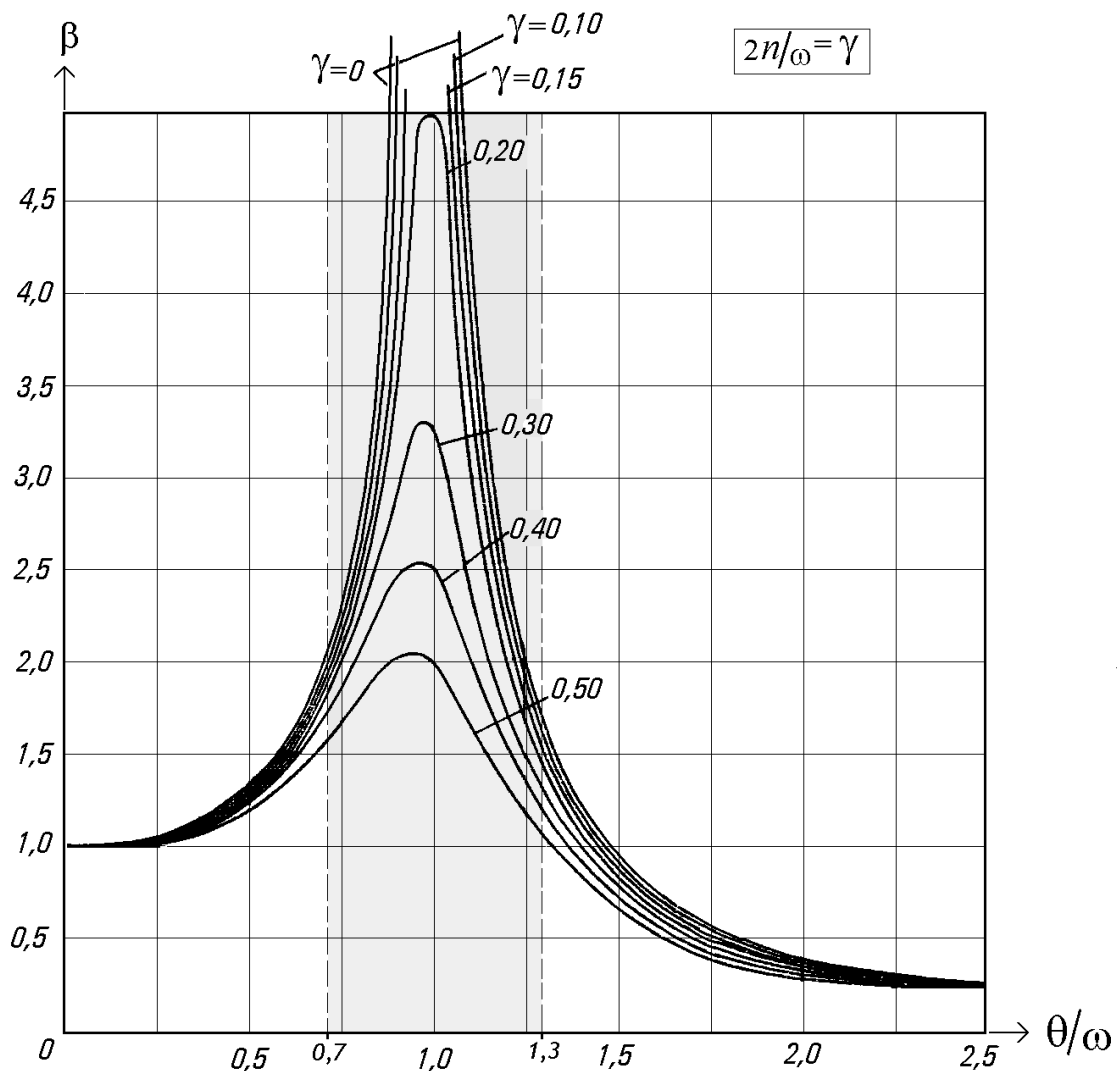


Рис. 8.4. Динамический коэффициент

Анализ зависимостей, представленных на рис. 8.4, показывает, что вне резонансного интервала (8.11) динамический коэффициент незначительно зависит от параметра демпфирования γ в системе и вне этого интервала динамический коэффициент (8.10) можно рассчитать по приближенной формуле, не учитывающей демпфирование в упругой системе:

$$\beta \approx \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}. \quad (8.12)$$

С учетом веса Q , статически действующего на балку, коэффициент динамичности определяется выражением

$$k_d = 1 + \frac{P}{Q} \beta. \quad (8.13)$$

Динамические напряжения, деформации и перемещения определяются по формуле (8.1) с учетом (8.13). При этом под статическими характеристиками $\sigma_{ст}$, $\varepsilon_{ст}$, $\Delta_{ст}$ понимаем напряжения, деформации и прогибы в балке при статическом действии на нее веса электродвигателя Q .

Примечание. В тех случаях, когда балку нельзя считать невесомой, вводится понятие приведенной сосредоточенной массы $M_{пр}$, которая определяется по формуле

$$M_{пр} = M \left(1 + \frac{M_B}{M} \beta_{п} \right), \quad (8.14)$$

где M – сосредоточенная масса, расположенная в т. K (рис. 8.3); M_B – масса всей балки; $\beta_{п}$ – коэффициент приведения массы балки к точке K , который определяется в соответствии с п. 8.2.2.

При расчетах собственная частота f часто выражается в Герцах (Гц). Связь частоты в Гц с круговой частотой определяется выражением $f = \omega/2\pi$.

8.3. Расчет на ударную нагрузку

На упругую систему в точку K с высоты H падает груз Q (рис. 8.5,а).

Подобрать размеры поперечного сечения конструкции, изготовленной из малоуглеродистой стали, если

$$\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = 320 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

коэффициент запаса прочности $n = 2$; массу упругой системы не учитывать.

Размеры круглого поперечного сечения балки, показанного на рис. 8.5, а, при $Q = 200 \text{ Н}$, $a = 2 \text{ м}$, $H = 0,2 \text{ м}$.

Решение

1. Приложим к системе статическую силу, равную весу падающего груза Q (рис. 8.5,б), и строим эпюру изгибающего момента M_x (рис. 8.5,в). Опорные реакции в сечении A , определенные из уравнений равновесия для балки:

$$M_A = Qa; \quad Y_A = P.$$

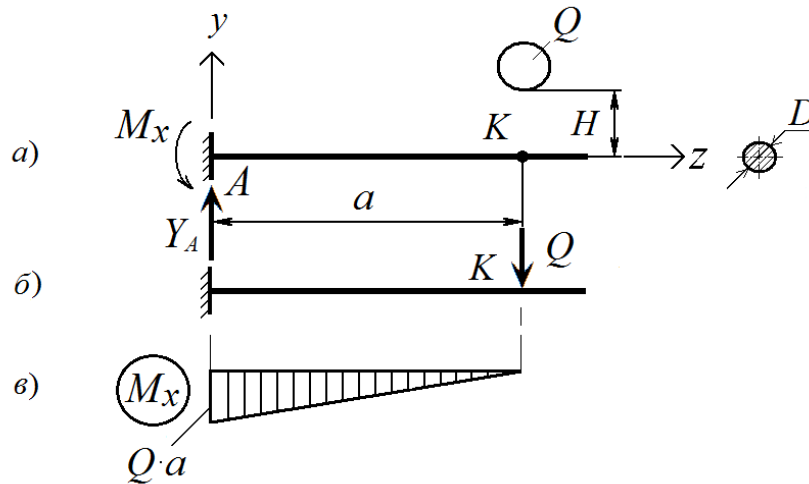


Рис. 8.5. Расчетная схема балки при ударе

2. Определим статический прогиб $\Delta_{ст}$ в точке K (рис. 8.6,б), применяя метод начальных параметров (см. п. 5.2).

Начальные параметры $y_0 = y_A = 0$; $\theta_0 = \theta_A = 0$, так как в сечении A балка жестко закреплена.

В соответствии с уравнением (5.10) получим

$$\begin{aligned}\Delta_K = y_K = y(a) &= \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{M_A(a-0)^2}{2!} + \frac{Y_A(a-0)^3}{3!} \right] = \\ &= \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{Qa \cdot a^2}{2} + \frac{Qa^3}{6} \right] = -\frac{Qa^3}{3EJ_x}.\end{aligned}$$

Знак «-» указывает на то, что прогиб точки K направлен вниз.

Момент инерции сплошного круглого поперечного сечения равен $J_x = \frac{\pi D^3}{64}$, поэтому окончательно получим

$$\Delta_{ст} = |\Delta_K| = \frac{64Qa^3}{3\pi ED^4}. \quad (8.15)$$

3. Коэффициент динамичности в соответствии с выражением (8.8) равен

$$k_d = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{ст}}} = \frac{D^2}{4a} \sqrt{\frac{3\pi EH}{2Qa}}. \quad (8.16)$$

4. Обращаясь к эпюре M_x (рис. 8.5,в), находим опасное сечение, в котором изгибающий момент достигает наибольшего значения

$\max M_x = M_A = Qa$, и определяем максимальную величину статических напряжений. Так как момент сопротивления балки равен

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32},$$

то

$$\max \sigma_{\text{ст}} = \frac{\max M_A}{W_x} = \frac{32Qa}{\pi D^3}.$$

5. Определяем величину динамических напряжений в опасном сечении (8.1):

$$\max \sigma_{\text{дин}} = k_d (\max \sigma_{\text{ст}}) = \frac{D^2}{4a} \sqrt{\frac{3\pi EH}{2Qa}} \frac{32Qa}{\pi D^3} = \frac{1}{0,4D} \sqrt{\frac{3\pi QEH}{2a}}. \quad (8.17)$$

6. Запишем условие прочности (8.2), которое с учетом (8.17) принимает вид

$$\max \sigma_{\text{дин}} = \frac{1}{0,4D} \sqrt{\frac{3\pi QEH}{2a}} \leq [\sigma]. \quad (8.18)$$

Находим допускаемые напряжения

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{320}{2} = 160 \text{ МПа.}$$

Определим из (8.17) требуемый диаметр D поперечного сечения

$$D \geq \frac{1}{0,4[\sigma]} \sqrt{\frac{3\pi QEH}{2a}} = \frac{1}{0,4 \cdot 160} \sqrt{\frac{3\pi \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^3}} = 67,8 \text{ мм.}$$

Округляя полученное значение D , окончательно принимаем $D = 68 \text{ мм}$.

Вычислим фактическое значение коэффициента динамичности при выбранном значении диаметра поперечного сечения балки (8.15)

$$k_d = \frac{D^2}{4a} \sqrt{\frac{3\pi EH}{2Qa}} = \frac{68^2}{4 \cdot 2 \cdot 10^3} \sqrt{\frac{3\pi \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 200 \cdot 2 \cdot 10^3}} = 12,54.$$

Таким образом, фактический коэффициент динамичности при ударе составляет $k_d = 12,54$.

8.4. Расчет упругой системы при действии вибрации

Упругая система представляет собой балку (рис. 8.6). Поперечное сечение балки выполнено в виде двух швеллеров.

В точке K на балке (рис. 8.6,а) установлен электродвигатель весом Q , частота вращения вала которого n мин⁻¹. Сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся деталей электродвигателя, равна $P_{ин}$. Материал балки – прокатная сталь с пределом текучести $\sigma_T = 320$ МПа и модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Требуется определить величину максимальных напряжений в балке и фактический коэффициент запаса ее прочности.

Остальные исходные данные приняты следующими:

- коэффициент запаса прочности $n_T = 2$;
- вес электродвигателя $Q = 6,4$ кН;
- $l = 1,8$ м;
- сила инерции $P_{ин} = 1,2$ кН;
- число оборотов электродвигателя $n = 320$ мин⁻¹.

Массу упругой системы не учитываем.

Решение

1. На рис. 8.6,а показана расчетная схема балки.

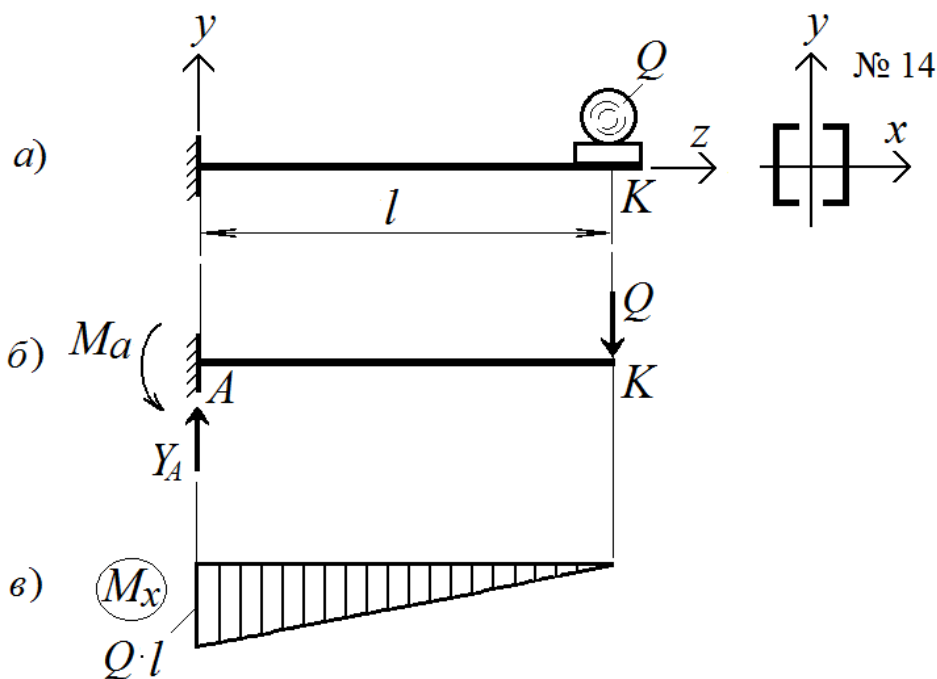


Рис. 8.6. Расчетная схема балки
при статическом нагружении

2. Приложим статически вес электродвигателя к балке в точке K (рис. 8.6,б) и из уравнений равновесия балки получим значения опорных реакций

$$Y_A = P; \quad M_A = Ql.$$

Эпюра изгибающего момента M_x показана на рис. 8.6,в, из которого следует, что наиболее нагруженным является сечение A , в котором максимальный изгибающий момент равен $\max M_x = Ql$, а максимальные статические нормальные напряжения в балке определяются выражением

$$\max \sigma_{\text{ст}} = \frac{\max M_x}{2W_x} = \frac{Ql}{2W_x} = \frac{6,4 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^3}{2 \cdot 70,2 \cdot 10^3} = 82,05 \text{ МПа},$$

где $W_x = 70,2 \text{ см}^3$ – момент сопротивления одного швеллера № 14 (прил. 3).

3. Применяя метод начальных параметров (см. п. 5.2), определяем статический прогиб в точке K , где установлен электродвигатель (рис. 8.6,б):

$$\Delta_{\text{ст}} = y_K = \frac{Ql^3}{3EJ_x}. \quad (8.19)$$

Здесь J_x – момент инерции двух швеллеров относительно оси x (см. рис. 8.6,а). Так как момент инерции одного швеллера № 14 (прил. 3) равен $J_x^{(1)} = 491,1 \text{ см}^4$, то $J_x = 2J_x^{(1)} = 982,2 \text{ см}^4$.

4. Собственная частота ω в соответствии с (8.9) и (8.19) определяется как

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{3EJ_x \cdot g}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 982,2 \cdot 10^{-8}}{6,4 \cdot 10^3 \cdot 1,8^3}} = 39,4 \text{ с}^{-1}.$$

5. Частота вынужденных колебаний определяется по формуле

$$\theta = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 320}{30} = 33,5 \text{ с}^{-1}.$$

Определим отношение частот:

$$\frac{\theta}{\omega} = \frac{33,5}{39,4} = 0,85,$$

Следовательно, $\theta = 0,85\omega$.

Таким образом, при работающем электродвигателе в соответствии с (8.11) вибрация балки происходит в резонансной области (8.11).

6. Так как по условию задачи балка является невесомой и в ней не происходит рассеяния энергии, то динамический коэффициент можно определить по формуле (8.12)

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{33,5}{39,4}\right)^2} = 3,61.$$

Коэффициент динамичности определяем по формуле (8.13)

$$k_d = 1 + \frac{P_{\text{и}}}{Q} \beta = 1 + \frac{1,2}{6,4} 3,61 = 1,7.$$

7. Максимальные динамические напряжения при вынужденных колебаниях балки (8.1) составляют

$$\max \sigma = k_d (\max \sigma_{\text{ст}}) = 1,7 \cdot 82,5 = 140,25 \text{ МПа.}$$

Допускаемые напряжения равны

$$[\sigma_d] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{320}{2} = 160 \text{ МПа.}$$

Условие прочности (8.2) выполняется, так как

$$\max \sigma_d = 140,25 < [\sigma_d] = 160 \text{ МПа.}$$

8. В качестве примера выполним динамический расчет балки с учетом ее веса. Вес балки в форме двух швеллеров № 14 равен

$$Q_B = 2ml = 2 \cdot 123 \cdot 1,8 = 442,8 \text{ Н} = 0,443 \text{ кН.}$$

Здесь $m = 123 \text{ Н}$ – вес погонного метра одного швеллера № 14 (прил. 3).

Коэффициент приведения $\beta_{\text{п}}$ для расчетной схемы балки (см. рис. 8.6,б) равен (см. п. 8.2.2) $\beta_{\text{п}} = 0,24$.

В соответствии с (8.13) приведенный вес балки к точке K (рис. 8.6) составляет $Q_{\text{пр}} = Q \cdot \alpha$, где коэффициент α определяется выражением

$$\alpha = 1 + \frac{Q_B}{Q} \beta_{\text{п}} = 1 + \frac{0,443}{6,4} 0,24 = 1,017;$$

$$Q_{\text{пр}} = 6,4 \cdot 1,017 = 6,51 \text{ кН.}$$

Максимальные статические напряжения в этом случае составляют

$$\max \sigma_{\text{ст}} = \frac{Q_{\text{пр}} l}{2W_x} = \alpha \frac{Ql}{2W_x} = 1,017 \cdot 82,05 = 83,44 \text{ МПа.}$$

Собственная частота:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{3EJ_x \cdot g}{\alpha Ql^3}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 39,4 = \sqrt{\frac{1}{1,017}} = 39,8 \text{ с}^{-1}.$$

Динамический коэффициент:

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{33,5}{39,8}\right)^2} = 3,45.$$

Коэффициент динамичности:

$$k_d = 1 + \frac{P_{\text{ин}}}{Q_{\text{пр}}} \beta = 1 + \frac{1,2}{6,51} 3,45 = 1,64.$$

Максимальные динамические напряжения:

$$\max \sigma_d = k_d (\max \sigma_{\text{ст}}) = 1,64 \cdot 83,44 = 136,8 \text{ МПа}.$$

Так как $\max \sigma_d < [\sigma_d]$, то условие прочности также выполняется.

Выводы:

1. Из проведенных исследований следует, что учет собственного веса несущественно влияет на результаты расчета:

– максимальные динамические напряжения в балке при этом изменились на $\delta_\sigma = \frac{|136,8 - 140,25|}{136,8} 100 \% = 2,5 \%$;

– коэффициент динамичности изменится на

$$\delta_k = \frac{|1,64 - 1,7|}{1,64} 100 \% = 3,6 \%.$$

2. Так как допускаемая погрешность инженерного расчета $\delta \leq 5 \%$, то допускается выполнять динамический расчет без учета собственного веса балки.

8.5. Защита систем от динамических воздействий

Рассмотрим современные методы и средства защиты технических систем различного назначения от динамических воздействий [1].

8.5.1. Классификация методов виброзащиты

При эксплуатации диапазон частот внешних вибрационных воздействий, как правило, является широким. Например, на авиационную технику действуют внешние вибрации в диапазоне до 2000 Гц, а на космическую технику – до 5000 Гц. Это в значительной степени затрудняет, а в подавляющем большинстве случаев не позволяет проектировать безрезонансные конструкции. Статистика показывает, что половина отказов элементов аппаратуры происходит на резонансных частотах колебаний шасси электронных блоков, несущих панелей, плат, контактных систем блоков радиоэлектронных систем, упругих элементов датчиков для измерения механических величин (датчиков сил, перемещений, давлений) и иных элементов приборов различного назначения. Попытки решить эти задачи обычными конструктивными мерами часто являются неприменимыми. Одним из подходов к решению проблемы повышенного уровня вибрации и шума является введение в конструкцию диссипативных механизмов с высоким уровнем рассеивания энергии [11].

На рис. 8.7 представлена классификация основных методов виброзащиты технических систем. Здесь под техническими системами понимаем элементы различной аппаратуры или изделий различного назначения.

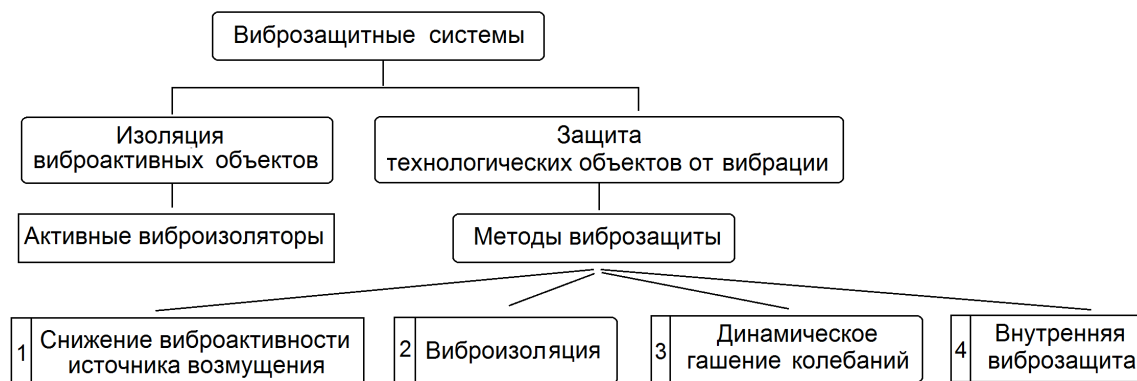


Рис. 8.7. Классификация методов виброзащиты технических систем

Для изоляции виброактивных систем применяют активные виброизоляторы, которые часто используются в станкостроении при виброизоляции станков, в ракетостроении для защиты от вибрации стартовых платформ, в авиации для защиты кресла пилота от перегрузок и в ряде других систем, к которым предъявляются

жесткие требования по динамической устойчивости. Активные виброзащитные системы включают в себя управляющие датчики и чувствительные элементы, которые постоянно следят за эффективностью виброзащиты в зависимости от внешнего вибрационного возмущения и корректируют работу этих систем в широком амплитудно-частотном диапазоне внешних вибрационных воздействий. Эти системы являются достаточно сложными и дорогостоящими. Их проектированием занимаются специальные конструкторские бюро [11].

Остановимся более подробно на методах защиты технических систем различного назначения от действия внешней вибрации при их эксплуатации. Основными методами виброзащиты являются (рис. 8.7):

- метод снижения виброактивности источника внешней вибрации, заключающийся в уменьшении уровня механических воздействий, которые возбуждаются некоторыми источниками;
- метод виброизоляции;
- метод динамического гашения колебаний;
- метод внутренней виброзащиты.

Так как обычно уровень и частотный диапазон внешних возмущающих воздействий является заданным (определяется условиями эксплуатации изделия), то на методе снижения виброактивности источника возмущения не останавливается. В качестве примера здесь можно привести задачу, рассмотренную в п. 8.4. Здесь источником виброактивного воздействия на упругую балку является электродвигатель. Уменьшение виброактивности возможно за счет снижения дисбаланса ротора электродвигателя. Для этого необходимо вводить более точную балансировку ротора до сборки электродвигателя.

8.5.2. Метод виброизоляции

Метод виброизоляции заключается в установке между объектом защиты и источником колебаний дополнительной системы, защищающей объект от механических воздействий. Устройства, устанавливаемые между источником вибрации и виброизолируемым объектом, называются виброизоляторами. При этом под термином «виброизоляция» понимается способность препятствовать передаче колебаний от источника на защищаемый от вибрации объект или его составную часть.

Применяемые виброизоляторы в зависимости от используемого в них упругого элемента подразделяются на следующие типы [11]:

- резинометаллические виброизоляторы;
- металлические виброизоляторы (пружинные, с упругим металловолоконным упругим элементом, из металлического троса; из металлической сетки или из пористого металла);
- пневматические;
- виброизоляторы с упругими элементами, изготовленными из композиционных материалов (например, из углепластика);
- электромагнитные виброизоляторы, в которых упругое свойство обеспечивается за счет магнитного поля.

Виброизоляторы всех типов подразделяются на два класса по возможности управления их характеристиками: регулируемые и нерегулируемые. В регулируемых виброизоляторах имеется ручная или автоматическая подстройка собственной частоты виброизолятора и контроль его несущей способности.

Подробное описание всех типов виброизоляторов представлено в [11]. Необходимо отметить, что в настоящее время наиболее перспективными являются металлические тросовые цилиндрические виброизоляторы (ВЦК), которые изготавливаются из металлического троса. Достоинствами ВЦК является то, что они имеют стабильные характеристики, являются высокотехнологичными, имеют ресурс не ниже 80 000 ч и могут эксплуатироваться в широком частотном диапазоне до 2000 Гц при температуре от -60 до $+100$ °С. Кроме виброизоляции ВЦК выдерживают одиночные удары амплитудой до 100 g при длительности удара от 5 до 10 мс.

Результаты испытаний ВЦК на долговечность показали, что они выдерживают до 10^6 ударов по всем трем направлениям. Таким образом, ВЦК обеспечивают не только надежную виброзащиту объектов, но и их ударозащиту при различных кинематических воздействиях (большая влажность, туман, тропический климат и т.п.).

В настоящее время спроектировано и выпускается более 50 типоразмеров ВЦК различной грузоподъемности [11].

8.5.3. Динамическое гашение колебаний

Метод динамического гашения колебаний состоит в том, что к защищаемому объекту присоединяется дополнительная механическая система, которая называется динамическим виброгасителем. Его работа основана на изменении состояния вибродемпфируемого объекта за счет передачи части энергии колебательного процесса на динамический гаситель и уменьшение амплитуды колебательного процесса основного объекта. В качестве упругой связи между

вибродемпфируемым объектом и массой гасителя устанавливается упругая пружинная прокладка из вязкоупругого материала. Эффективность применения виброгашения является достаточно высокой.

8.5.4. Методы внутренней виброзащиты

Методы внутренней виброзащиты заключаются в изменении конструкции объекта, при котором заданные динамические воздействия будут вызывать менее интенсивные колебания объекта или отдельных частей и элементов. Можно указать два способа снижения уровня колебаний, общих для всех технических устройств.

Первый способ состоит в устранении резонансных явлений за счет изменения собственных частот системы в сторону их уменьшения или увеличения для вывода их из резонансной зоны. К сожалению, конструктивно это не всегда удается выполнить, поэтому, как правило, система имеет резонансные явления в эксплуатационном частотном диапазоне внешних воздействий.

Второй способ заключается в увеличении диссипации (рассеяния) энергии в конструкции за счет применения материалов с повышенными диссипативными свойствами или введения в конструкцию демпфирующих устройств различного типа. Например, проектирование многосложных конструкций, у которых часть слоев обладает повышенными диссипативными свойствами [11]:

- применение вибропоглощающих сплавов с высокими диссипативными свойствами;
- применение вязкоупругих полимерных композиционных материалов (слоистых или волокнистых);
- применение дискретных рабочих сред (ДРС). Сущность метода виброзащиты с использованием ДРС заключается в следующем. Объем корпуса блока или прибора заполняется ДРС-сферами, изготовленными из диэлектрических материалов (стекло, полимеры). При вибрации за счет трения сфер друг об друга происходит рассеяние энергии колебательного процесса и уменьшение динамических характеристик вибродемпфируемого блока. Существенной особенностью этого способа является то, что блок с ДРС-сферами является ремонтпригодным.

Применение слоистых вибродемпфирующих покрытий – это эффективный способ вибродемпфирования. Покрытия могут состоять из жестких вязкоупругих слоев, имеющих различные демпфирующие свойства, что позволяет обеспечить вибродемпфирование в широком эксплуатационном диапазоне температур.

Особый интерес представляют слоистые вибродемпфирующие покрытия, состоящие из вязкоупругих слоев различной жесткости. При этом «мягкие» слои покрытия работают на сдвиг и именно в них происходит максимальное рассеяние энергии при вибрации. Отличительной особенностью таких покрытий является их высокая эффективность при малом весе. Конструктивно такие покрытия выполняются в виде многослойных вибродемпфирующих лент, которые наклеиваются на отдельные участки защищаемого объекта. Экспериментальные исследования показывают, что применение вибродемпфирующих покрытий позволяет снизить коэффициент динамичности реальных конструкций в десятки раз [11] при минимальном увеличении веса конструкции.

В сложных ситуациях может применяться совокупность методов вибродемпфирования, например совместное использование вибродемпфирующих покрытий и динамических гасителей колебаний и т.п. [11].

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры динамических внешних нагрузок.
2. Как рассчитываются динамические напряжения, деформации, перемещения?
3. Как записывается условие прочности при динамическом нагружении?
4. Дайте определение коэффициента динамичности при действии линейных ускорений.
5. Как рассчитывается коэффициент динамичности при ударе?
6. Как учитывается масса элемента конструкции при ударе?
7. Запишите приближенную формулу для расчета коэффициента динамичности при ударе.
8. Как определяется динамический коэффициент при действии гармонической вибрации?
9. Как вычислить основную собственную частоту балки при вибрации?
10. Что такое резонанс? Когда он возникает?
11. Какая частотная область называется резонансной?
12. Как вычисляется коэффициент динамичности при вибрационном воздействии?
13. Как вычисляются динамические напряжения в элементе конструкции при действии вибрации?

14. Как учитывается вес элемента конструкции при действии вибрации?

15. Сформулируйте порядок выполнения расчета на прочность при динамическом воздействии.

16. Назовите основные методы виброзащиты.

17. Расскажите суть метода виброизоляции.

18. За счет чего выполняется динамическое гашение колебаний?

19. Какие методы внутренней виброзащиты вы знаете?

20. В чем состоит преимущество вибродемпфирующих покрытий?

9. Устойчивость сжатых стержней

9.1. Основные понятия

Под устойчивостью понимается свойство системы самостоятельно восстановить свое первоначальное состояние после того, как ей было сообщено малое отклонение от исходного положения равновесия. Если система не обладает таким свойством, то она называется неустойчивой [1].

Ниже рассматривается устойчивость центрально сжатых стержней (рис. 9.1), которые при потере устойчивости изгибаются.



Рис. 9.1. Схема потери устойчивости стержнем

Критической силой $P_{кр}$ называется наименьшее значение сжимающей продольной силы, при котором прямолинейная форма равновесия стержня перестает быть устойчивой.

Критическое напряжение определяется по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F}, \quad (9.1)$$

где F – площадь поперечного сечения стержня. Условие устойчивости можно записать в двух видах:

– по напряжениям, возникающим в поперечных сечениях стержня:

$$\sigma \leq [\sigma_y]; \quad (9.2)$$

– по усилиям:

$$P \leq [P_y]. \quad (9.3)$$

Здесь допускаемые напряжения $[\sigma_y]$ и силы $[P_y]$ на устойчивость определяются соотношениями

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}; \quad [P_y] = \frac{P_{кр}}{n_y}, \quad (9.4)$$

где $n_y > 1$ – коэффициент запаса на устойчивость, который обычно принимается больше, чем коэффициент запаса на прочность: $n_y > n_T$ – для пластичных материалов; $n_y > n_B$ – для хрупких материалов.

9.2. Расчетные формулы

При расчетах на устойчивость вводятся понятия гибкости λ и предельной гибкости $\lambda_{пред}$ стержня.

Гибкостью называется безразмерный параметр

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}, \quad (9.5)$$

где μ – коэффициент приведенной длины, величина которого зависит от способа закрепления концов стержня (прил. 4); $i = \frac{J}{F}$ – минимальный радиус инерции поперечного сечения. Здесь J – минимальный момент инерции поперечного сечения относительно его главных центральных осей x и y (см. п. 3)

$$J = \min(J_x; J_y). \quad (9.6)$$

Предельной гибкостью называется безразмерный параметр

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}, \quad (9.7)$$

где E и $\sigma_{пц}$ – модуль упругости первого рода и предел пропорциональности материала стержня соответственно.

Существенной особенностью является то, что гибкость λ зависит только от геометрических характеристик и способа закрепления концов стержня (9.5). Предельная гибкость $\lambda_{пред}$ зависит только от свойств материала стержня (9.7).

Если гибкость стержня больше либо равна предельному значению ($\lambda \geq \lambda_{пред}$), то при потере устойчивости в поперечных сече-

ниях возникают только упругие деформации. При $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ в сечениях стержня при потере устойчивости имеют место упруго-пластические деформации [1].

В зависимости от вида деформаций в поперечных сечениях стержня расчет критических сил $P_{\text{кр}}$ и критических напряжений $\sigma_{\text{кр}}$ проводится по следующим формулам:

– при $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$ расчет ведется по формулам Л. Эйлера

$$P_{\text{кр}} = P_{\text{кр}}^{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}; \quad (9.8)$$

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}}^{\text{Э}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}; \quad (9.9)$$

– при выполнении условия $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ расчет ведется по формуле Ф. Ясинского

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}}^{\text{Я}} = a - b\lambda + c\lambda^2; \quad (9.10)$$

$$P_{\text{кр}} = P_{\text{кр}}^{\text{Я}} = \sigma_{\text{кр}}^{\text{Я}} \cdot F. \quad (9.11)$$

Здесь a , b , c – коэффициенты, величины которых зависят от свойств материала. Эти коэффициенты определяются экспериментально, а их значения для некоторых материалов приведены в табл. 9.1 и [3].

Таблица 9.1

Значения коэффициентов Ясинского

Материал	Значения коэффициентов, МПа			Предельная гибкость $\lambda_{\text{пред}}$
	a	b	c	
Ст. 2	250	0,668	0	105
Ст. 3	310	1,14	0	100
Ст. 4, Сталь 20	343	1,42	0	95
Ст. 5	464	3,617	0	100
Сталь 45	589	3,82	0	85
Чугун	776	12,0	0,053	60
Алюминиевый сплав Д16Т	400	3,33	0	–
Дерево (ель, сосна)	29,3	0,194	0	70

Для большинства конструкционных материалов коэффициент c оказывается малым, поэтому в практических расчетах на устойчивость по формуле Ф. Ясинского можно считать $c = 0$ и расчет выполняют по приближенной формуле

$$\sigma_{кр}^{\text{Я}} = a - b\lambda. \quad (9.12)$$

На рис. 9.2 для материала Ст. 3 показана полная диаграмма зависимости критических напряжений $\sigma_{кр}(\lambda)$ от гибкости λ , которая позволяет выделить зоны, в которых применяются формулы Л. Эйлера (9.9) и Ф. Ясинского (9.10) и (9.12). При построении диаграммы использованы соотношения (9.9) и (9.12).

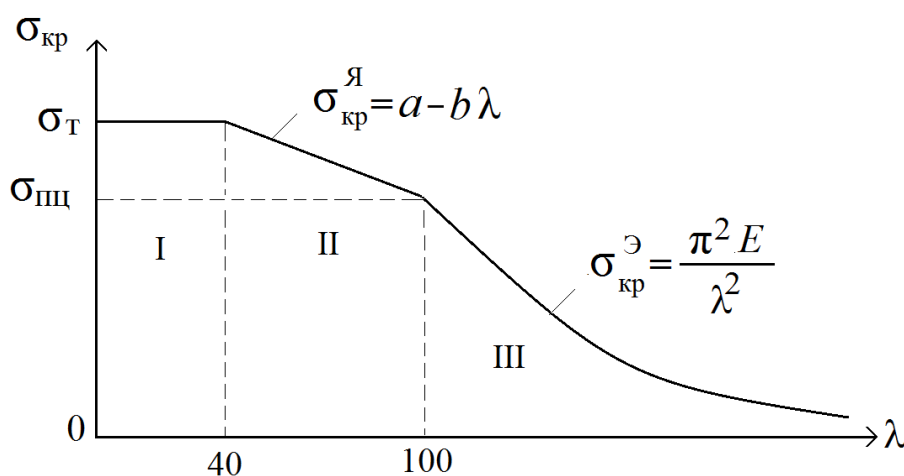


Рис. 9.2. Полная диаграмма для критических напряжений стержня из материала Ст. 3

Зона I ($\lambda \leq 40$) соответствует сжатию коротких стержней. Потери устойчивости в этой зоне не происходит, стержень работает на сжатие. Расчет на устойчивость не выполняется (это зона коротких стержней).

Зона II ($40 < \lambda < 100$) соответствует стержням средней гибкости. Потеря устойчивости происходит с образованием пластичных деформаций в поперечном сечении стержня. Расчет ведется по формулам Ф. Ясинского.

Зона III ($\lambda \geq 100$) соответствует гибким стержням. Потеря устойчивости происходит в упругой области ($\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$). Расчет ведется по формулам Л. Эйлера.

9.3. Особенности расчета на устойчивость

В тех случаях, когда стержни, работающие на сжатие, имеют различные условия закрепления в главных плоскостях инерции, необходимо вычислить гибкости λ_x и λ_y относительно главных центральных осей x и y поперечного сечения (рис. 9.3,а). В плоскости xOz оба конца стержня жестко зашце́млены (рис. 9.3,б). В плоскости yOz верхний конец свободен (рис. 9.3,в).

На рис. 9.3,б показана форма потери устойчивости в плоскости xOz и значение коэффициента приведенной длины при потере устойчивости относительно оси y ($\mu_y = 1/2$, см. прил. 4).

На рис. 9.3,в показана форма потери устойчивости относительно оси x в плоскости yOz . При этом коэффициент приведенной длины $\mu_x = 2$ (см. прил. 4).

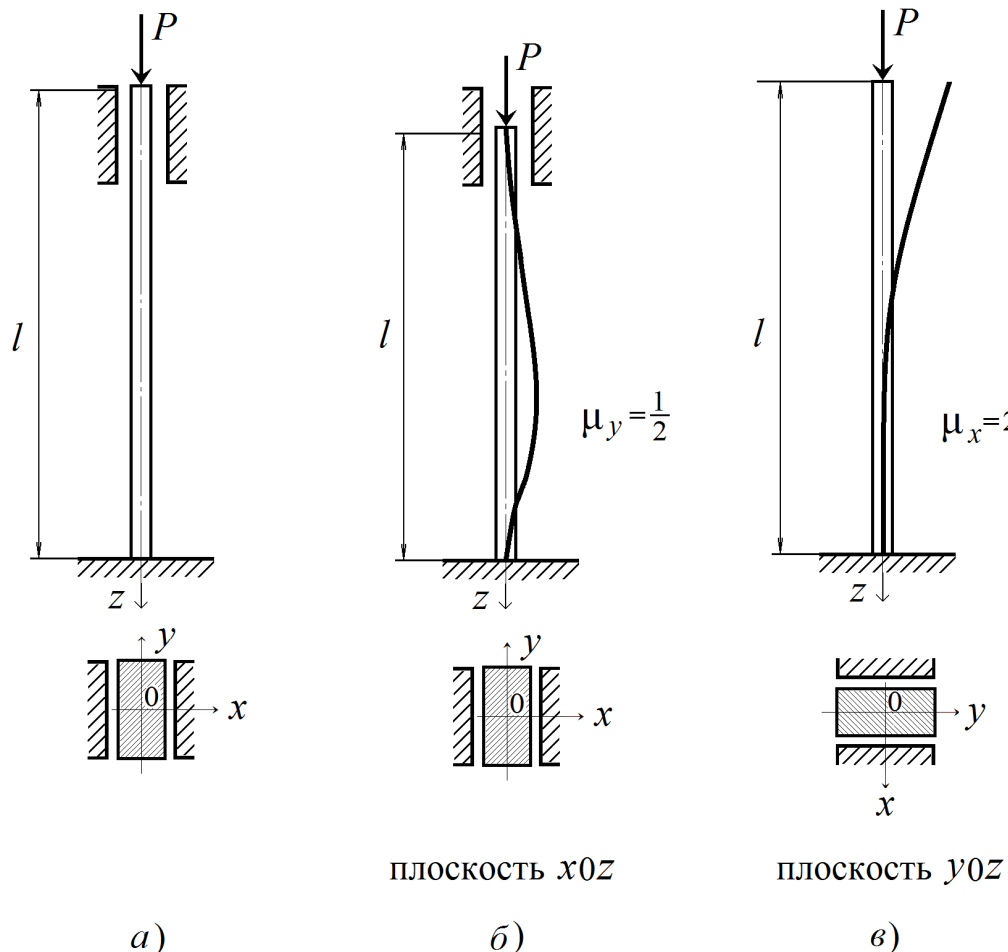


Рис. 9.3. Расчетная схема и формы потери устойчивости стержнем

Гибкости стержня в этих плоскостях вычисляются аналогично (9.5):

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y}; \lambda_x = \frac{\mu_x l}{i_x}, \quad (9.13)$$

где радиусы инерции относительно осей x и y определяются как (9.10)

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}; i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}. \quad (9.14)$$

Так как потеря устойчивости происходит в плоскости максимальной гибкости, то вычисляют максимальную гибкость

$$\lambda = \max(\lambda_x; \lambda_y) \quad (9.15)$$

и весь дальнейший расчет на устойчивость ведется в соответствии с п. 9.2 в плоскости максимальной гибкости стержня.

9.4. Пример расчета на устойчивость

Определить допускаемое значение силы $[P_y]$ из расчета на устойчивость стального стержня, показанного на рис. 9.4, если известно: $l = 1,2$ м; $a_1 = 20$ мм, $a_2 = 40$ мм, $a_3 = 65$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{\text{пл}} = 200$ МПа; коэффициенты Ясинского $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа, $c = 0$.

Решение

1. Определяем положение центра тяжести поперечного сечения. Выбираем вспомогательную систему координат ux_1 для заданного поперечного сечения (рис. 9.5), где ось y , будучи осью симметрии, является главной центральной осью.

Для определения вертикальной координаты центра тяжести разбиваем сечение на два прямоугольника (1 и 2) и определяем координату центра тяжести y_C по формуле (9.2)

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_{Ci}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{1300 \cdot 52,5 + 800 \cdot 10}{1300 + 800} = 36,3 \text{ мм},$$

где F_i , y_{Ci} – площадь и координата центра тяжести i -й части сечения в принятой системе координат; n – число элементарных частей, на которые разбивается сечение (в данном случае $n = 2$).

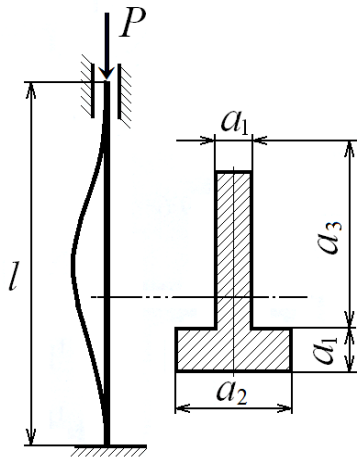


Рис. 9.4. Расчетная схема стержня

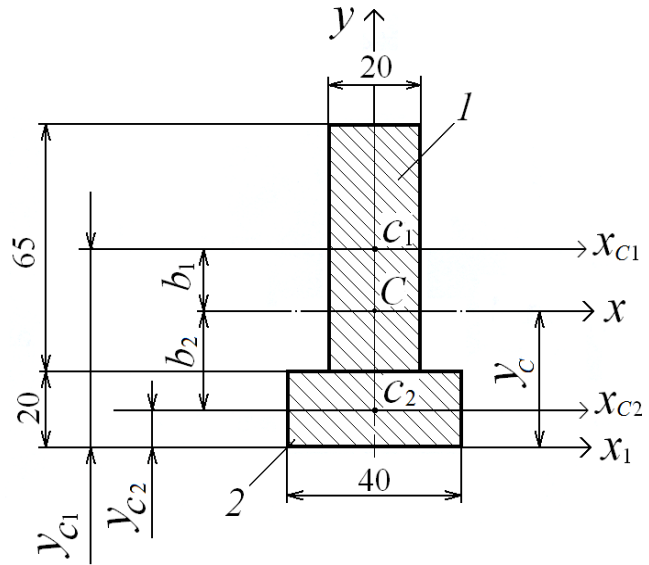


Рис. 9.5. Поперечное сечение стержня

При этом $F_1 = 1300 \text{ мм}^2$; $F_2 = 800 \text{ мм}^2$; $y_{C1} = 52,5 \text{ мм}$; $y_{C2} = 10 \text{ мм}$.

Вторая главная центральная ось x проходит через центр тяжести C всего сечения (рис. 9.5).

2. Определяем моменты инерции относительно главных центральных осей, используя формулу о параллельном переносе осей

$$J_x = \sum_{i=1}^n (J_{xi} + b_i^2 F_i),$$

где J_{xi} – момент инерции i -й части относительно своей центральной оси x ; b_i – расстояние между центральной осью i -й части и главной центральной осью всего сечения.

Применительно к рассматриваемому сечению (см. рис. 9.5) получим

$$J_x = (J_{x1} + b_1^2 F_1) + (J_{x2} + b_2^2 F_2),$$

$$\text{где } J_{xi} = \frac{b_i h_i^3}{12}; \quad J_{x1} = \frac{20 \cdot 65^3}{12}; \quad J_{x2} = \frac{40 \cdot 20^3}{12}.$$

Окончательно получим

$$J_x = \left(\frac{20 \cdot 65^3}{12} + 16,2^2 \cdot 1300 \right) + \left(\frac{40 \cdot 20^3}{12} + 26,3^2 \cdot 800 \right) = 138 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Так как ось y является главной центральной для всего сечения и для каждой его части, второй осевой момент инерции вычисляется как сумма моментов инерции отдельных частей

$$J_y = \sum_{i=1}^n J_{yi} = J_{y1} + J_{y2} = \frac{65 \cdot 20^3}{12} + \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 15 \cdot 10^4 \text{ мм}^4,$$

где $J_{yi} = \frac{h_i b_i^3}{12}$; $J_{y1} = \frac{65 \cdot 20^3}{12}$; $J_{y2} = \frac{20 \cdot 40^3}{12}$.

Так как $J_x > J_y$, а условия закрепления концов одинаковы во всех плоскостях, то потеря устойчивости происходит в плоскости минимальной жесткости, т.е. в плоскости чертежа (см. рис. 9.4) относительно оси y , имеем $J_{\min} = J_y = 15 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$. Форма потери устойчивости показана на рис. 9.4.

3. Определяем гибкость стержня по формуле (9.5)

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}},$$

где μ – коэффициент приведенной длины, величина которого зависит от способа закрепления концов стержня (в рассматриваемом случае $\mu = 0,5$, см. рис. 9.3); $i_{\min}$ – минимальный радиус инерции поперечного сечения, вычисляемый по формуле

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 10^4}{2100}} = 8,45 \text{ мм},$$

где F – площадь сечения, $F = 800 + 1300 = 2100 \text{ мм}^2$.

В соответствии с (9.5) гибкость равна

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 1200}{8,45} = 71,0.$$

4. Предельная гибкость для стального стержня равна (9.7)

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 100.$$

5. Определяем величину критической силы.

Так как $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$, формула Эйлера неприменима. Расчет критических напряжений производим по формуле Ясинского (9.12)

$$\sigma_{\text{кр}}^{\text{Я}} = a - b\lambda,$$

где a, b – коэффициенты, величины которых равны $a = 310 \text{ МПа}$, $b = 1,14 \text{ МПа}$.

$$\sigma_{\text{кр}}^{\text{Я}} = a - b\lambda + c\lambda^2 = 310 - 1,14 \cdot 71 = 229 \text{ МПа.}$$

Критическая сила равна (9.11)

$$P_{\text{кр}} = P_{\text{кр}}^{\text{Я}} = \sigma_{\text{кр}} F = 229 \cdot 2100 = 481 \cdot 10^3 \text{ Н} = 481 \text{ кН.}$$

6. Допускаемое значение сжимающей силы из расчета на устойчивость определяется выражением (9.4)

$$[P_y] = \frac{P_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{481}{2,5} = 192 \text{ кН.}$$

9.5. Практический расчет на устойчивость

При выполнении практических расчетов на устойчивость условие устойчивости (9.2) принято заменять на условие, аналогичное условию прочности (2.14).

В этом случае условие устойчивости записывают в виде

$$\sigma \leq \varphi[\sigma_{\text{сж}}], \quad (9.16)$$

где $[\sigma_{\text{сж}}]$ – допускаемые напряжения на сжатие для материала стержня.

Коэффициент $\varphi(\lambda) \leq 1$ называется коэффициентом снижения допускаемых напряжений. Величина этого коэффициента зависит от марки материала и гибкости λ стержня, значения этого коэффициента для некоторых материалов приведены в прил. 5 и справочнике [3].

Таким образом, расчет на устойчивость с помощью коэффициента φ сводится к обычному расчету на прочность, но с пониженными допускаемыми напряжениями.

9.6. Проектный расчет на устойчивость

Из расчета на устойчивость выполнить проектный расчет прямого стержня, сжатого силой P в соответствии с рис. 9.6.

Условия закрепления во всех плоскостях одинаковы. Материал – дерево; $l = 360 \text{ см}$; $P = 140 \text{ кН}$; $[\sigma_{\text{сж}}] = 10 \text{ МПа}$. Поперечное сечение – круг диаметром D .

Решение

В соответствии с условием задачи требуется определить диаметр поперечного сечения D . Применяем расчет с помощью понижающего коэффициента φ (см. п. 9.5).

Условие устойчивости в этом случае имеет вид (9.16)

$$\sigma \leq \varphi[\sigma_{сж}] \text{ или } P \leq \varphi[\sigma_{сж}] F. \quad (9.17)$$

Из (9.16) получим

$$F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma_{сж}]}. \quad (9.18)$$

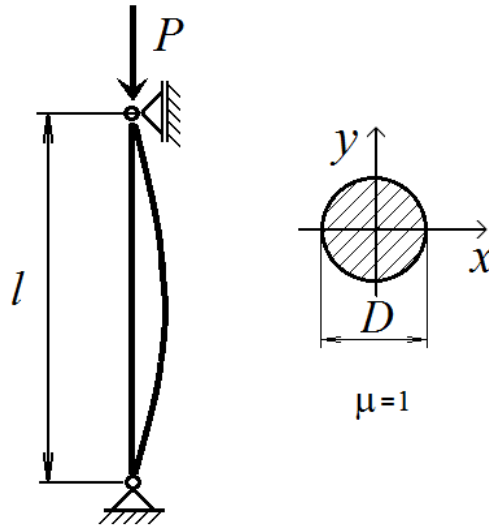


Рис. 9.6. Расчетная схема стержня

Так как диаметр D неизвестен, то момент инерции поперечного сечения и его радиус инерции i также неизвестны. Следовательно, нам неизвестна и гибкость стержня λ (9.5), по которой определяется числовое значение коэффициента φ (см. прил. 5).

Задачу решаем методом последовательных приближений. Для этого задаем на первом шаге расчета значение коэффициента $\varphi_1 = 0,5$ и из формулы (9.18) получаем

$$F_1 = \frac{1,4 \cdot 10^5}{0,5 \cdot 10} = 2,8 \cdot 10^4 \text{ мм}^2.$$

Диаметр сечения на первом шаге расчета принимаем

$$D_1 = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,8 \cdot 10^4}{\pi}} = 189 \text{ мм}.$$

Момент инерции поперечного сечения в этом случае равен

$$J_1 = \frac{\pi D_1^4}{64} = \frac{\pi 189^4}{64} = 6,27 \cdot 10^8 \text{ мм}^4.$$

Радиус инерции равен

$$i_1 = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{\pi D_1^4 4}{64 \pi D_1^2}} = \frac{D_1}{4}. \quad (9.19)$$

Таким образом, на первом этапе приближения получим гибкость

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_1} = \frac{4 \mu l}{D_1}, \quad (9.20)$$

т.е.
$$\lambda_1 = \frac{4 \cdot 1 \cdot 3600}{189} = 76. \quad (9.21)$$

По таблицам (см. прил. 5) для гибкости $\lambda_1 = 76$ получаем значение коэффициента $\varphi'_1 = 0,53$.

Определяем погрешность расчета коэффициента φ по формуле

$$\delta = \frac{|\varphi'_1 - \varphi_1|}{\varphi_1} 100 \%. \quad (9.22)$$

Таким образом, погрешность определения коэффициента φ на первом шаге составляет

$$\delta_1 = \frac{|0,53 - 0,5|}{0,5} 100 \% = 6 \%.$$

Так как допускается погрешность расчета не более 5 %, а погрешность на первом шаге составляет 6 %, то выполняем второй шаг приближения.

Задаем значение коэффициента φ_2 , равное среднему значению между φ_1 и φ'_1 :

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,53}{2} = 0,515.$$

В этом случае по формуле (9.18) получим

$$F_2 = \frac{1,4 \cdot 10^5}{0,515 \cdot 10} = 2,72 \cdot 10^4 \text{ мм}^2.$$

Диаметр сечения на втором шаге равен

$$D_2 = \sqrt{\frac{4F_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,72 \cdot 10^4}{\pi}} = 186 \text{ мм}.$$

Гибкость стержня по формуле (9.20) на втором шаге составляет

$$\lambda_2 = \frac{4\mu l}{D_2} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 3600}{186} = 77,5.$$

По таблице (см. прил. 5) для $\lambda = 77,5$ получим $\varphi'_2 = 0,515$.

Так как в начале и конце второго шага значения коэффициентов φ совпали $\varphi_2 = \varphi'_2$, то окончательно принимаем $\varphi = 0,515$ и, следовательно поперечное сечение должно иметь диаметр $D \geq 186$ мм.

Окончательно принимаем $D = 190$ мм.

П р и м е ч а н и я: 1. Если первоначальное значение коэффициента φ_1 на первом шаге выбрано неудачно, то потребуется сделать несколько шагов приближения, чтобы обеспечить погрешность вычислений менее 5 %.

2. Если в таблице $\varphi(\lambda)$ (см. прил. 5) для полученного значения гибкости λ отсутствуют значения коэффициента φ , то следует применить метод линейной аппроксимации на интервале по схеме, показанной на рис. 9.7.

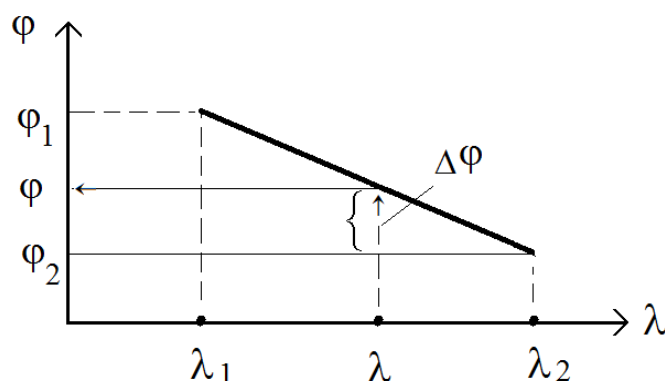


Рис. 9.7. Схема линейной аппроксимации зависимости $\varphi(\lambda)$

Из таблицы выбирают ближайшие значения гибкости λ_1 и λ_2 , лежащие слева и справа от заданного значения гибкости λ , и записывают соответствующие значения коэффициентов $\varphi_1 = \varphi(\lambda_1)$ и $\varphi_2 = \varphi(\lambda_2)$, приведенные в таблице значений $\varphi(\lambda)$ для заданного материала стержня (см. прил. 5).

Значение коэффициента $\varphi(\lambda)$ для заданного значения гибкости λ определяется в соответствии с рис. 9.10 по формуле

$$\varphi(\lambda) = \varphi_2 + \Delta\varphi, \quad (9.23)$$

где $\Delta\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

Окончательно из (9.23) получаем

$$\varphi(\lambda) = \varphi_2 + (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (9.24)$$

Контрольные вопросы

1. Какие упругие системы называются устойчивыми?
2. Что называется критической силой и критическим напряжением?
3. Что называется коэффициентом приведенной длины и от чего зависит его значение?
4. Что называется гибкостью стержня?
5. Как вычисляется предельная гибкость стержня?
6. От чего зависит гибкость стержня?
7. От чего зависит предельная гибкость стержня?
8. Запишите формулу Эйлера для критической силы и критического напряжения.
9. Сформулируйте условия применимости формулы Эйлера.
10. Запишите формулу Ясинского для критической силы и критического напряжения.
11. Сформулируйте условия применимости формулы Ясинского.
12. Нарисуйте полную диаграмму для критических напряжений.
13. Как влияет жесткость поперечного сечения на изгиб (EJ) и длина стержня на величину критической силы?
14. Как влияет способ закрепления концов стержня на величину критической силы?
15. Запишите условие устойчивости.
16. Как определить плоскость, в которой происходит потеря устойчивости стержня?
17. Как выполняется расчет на устойчивость, если стержень имеет разные условия закрепления концов в главных плоскостях?
18. Что такое коэффициент снижения допускаемых напряжений φ ?
19. От чего зависит численное значение коэффициента φ ?
20. Сформулируйте порядок выполнения проектного расчета на устойчивость с применением коэффициента φ .

10. Задания для выполнения курсовых работ

10.1. Общие указания

Курсовые и контрольные работы являются составной частью учебной дисциплины «Техническая механика» для студентов всех форм обучения.

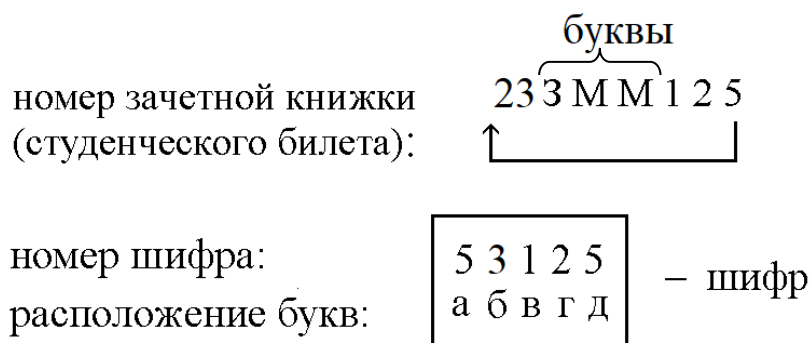
Название курсовой работы – «Расчет и проектирование элементов конструкций».

Объем курсовых и контрольных работ определяется в соответствии с учебными планами по каждому направлению. График проведения и тематика курсовых и контрольных работ ежегодно утверждаются на кафедре и доводятся до сведения студентов в начале семестра.

Данные для решения каждой задачи выбираются из таблиц заданий согласно варианту, который определяется по номеру зачетной книжки (студенческого билета) и пяти буквам русского алфавита.

Курсовые и контрольные работы служат для развития у студентов навыков самостоятельного решения практических задач по обеспечению прочности, жесткости и устойчивости типовых элементов конструкций машино- и приборостроительного направлений, анализа их напряженно-деформированного состояния при действии внешних эксплуатационных и технологических нагрузок.

Для определения варианта работы следует из номера зачетной книжки (студенческого билета) исключить все буквы, а первую цифру номера заменить на последнюю и под полученным цифровым шифром записать буквы (а, б, в, г, д) в соответствии с приведенным примером:



Записав шифр, состоящий из пяти цифр и пяти букв, для каждой задачи из таблиц выбирают число, которое находится на пере-

сечении соответствующей строки (на ней расположены буквы шифра) и столбца (на ней расположены цифры шифра). Причем вначале берется буква, а затем находится соответствующая ей в шифре цифра. Номер зачетной книжки и соответствующий ему шифр задания указывается на титульном листе курсовой (контрольной) работы.

Решение каждой задачи должно сопровождаться краткими, последовательными без сокращений слов пояснениями и чертежами. При использовании формул и данных, отсутствующих в рекомендуемых учебниках и настоящем пособии, необходимо указать источник используемой литературы. Подстановка цифр в расчетные формулы должна выполняться полностью. Вычисления должны вестись с точностью до трех значащих цифр с обязательным указанием размерности полученного результата в системе единиц СИ.

Перед подстановкой числовых значений необходимо все исходные величины привести к соответствующим единицам измерения механических величин (табл. 10.1, 10.2).

Таблица 10.1

**Основные единицы механических величин
в Международной системе единиц (СИ)**

Величина		Единица в системе СИ		
Наименование	Обозначение	Наименование	Единица измерения	Соотношения единиц
Сосредоточенная сила	P	Ньютон	Н	$10 \text{ Н} \approx 1 \text{ кгс}$
Моменты (изгибающие, крутящий)	$M_x; M_y; M_{кр}$	Ньютон·метр	Н·м	$1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 0,1 \text{ кгс} \cdot \text{м}$
Напряжение (нормальное, касательное)	σ, τ	Паскаль	Па	$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ $1 \text{ Мпа} = 1 \text{ Н/мм}^2$
Модуль упругости	E, G	Паскаль	Па	$1 \text{ Мпа} = 10^6 \text{ Па}$
Погонная (равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q)	q	<u>Ньютон</u> метр	Н/м	$1 \text{ Н/м} = 0,1 \text{ кгс/м}$
Ударная вязкость	a	—	$\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^2}$	$1 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = 10^{-5} \frac{\text{кгс} \cdot \text{м}}{\text{см}^2}$
$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Н/м}^2 = 100 \text{ Н/см}^2 = 1 \text{ Н/мм}^2$				

Кратные и дольные единицы

Приставка	Гига	Мега	Кило	Гекто	Дека	Деци	Санتي	Милли	Микро	Нано
Обозначение	Г	М	к	г	да	д	с	м	мк	н
Множитель	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Необходимые справочные данные для выполнения расчетов приведены в прил. 1–5 настоящего пособия.

Перед выполнением курсовой (контрольной) работы предварительно следует изучить соответствующие разделы курса по лекциям и рекомендованным учебникам и пособиям [1, 2, 4]. Для более углубленного изучения курса дополнительно рекомендуются пособия [8–11].

Курсовая работа оформляется в виде расчетно-пояснительной записки формата А4 и имеет следующую структуру:

- титульный лист (прил. 6);
- задание на курсовую работу (пример задания на курсовую работу приведен в прил. 7);
- реферат;
- содержание;
- введение;
- основной раздел, который содержит расчеты и схемы всех задач в соответствии с заданием;
- заключение, включающее в себя общие выводы по выполненной курсовой работе;
- список литературы.

Структура пояснительной записки приведена в прил. 8.

Курсовая работа оформляется в соответствии с рекомендациями, сформулированными в [12].

Контрольная работа выполняется в отдельной тетради.

Ниже представлены темы разделов курсовой и контрольной работ.

10.2. Расчет статически определимого стержня

Задача 1

Ступенчатый стержень (рис. 10.1), участки которого имеют площади поперечных сечений F_i , нагружен продольными силами P_i . Сечения участков стержня – квадрат со стороной a_i , длины участков равны l_i .

Требуется построить эпюры нормальных усилий N и нормальных напряжений σ , вычислить полное удлинение стержня и сделать вывод о прочности стержня.

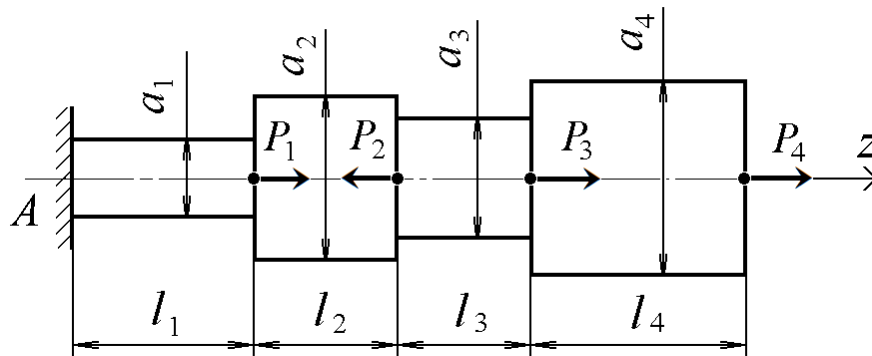


Рис. 10.1. Расчетная схема стержня

Материал стержня – сталь с модулем упругости первого рода $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и допускаемым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа. Данные для расчета принять по табл. 10.3. Для получения численного результата принять значения: $P = 10$ кН, $a = 10$ мм, $l = 500$ мм.

Таблица 10.3

Исходные данные к задаче 1

Номер строки	P_i				a_i				l_i			
	P_1	P_2	P_3	P_4	a_1	a_2	a_3	a_4	l_1	l_2	l_3	l_4
1	P	$3P$	$0,5P$	$-P$	$2a$	a	$2a$	a	l	$0,5l$	$0,7l$	$0,8l$
2	P	$-3P$	$2P$	$0,5P$	a	a	$2a$	$2a$	$2l$	l	$0,8l$	$0,9l$
3	P	$3P$	$0,6P$	$-3P$	$3a$	a	$3a$	$3a$	$0,8l$	$2l$	l	l
4	P	$2P$	$2P$	$-2P$	$4a$	$2a$	a	a	l	$1,1l$	$2l$	$0,6l$
5	P	$-2P$	$2,2P$	$0,6P$	$4a$	a	$2a$	$2a$	$0,7l$	l	l	$2l$
6	$2P$	$3P$	$-P$	$0,8P$	$3a$	$2a$	$4a$	$4a$	$2l$	$2l$	l	l
7	$2P$	$-5P$	$0,7P$	$-2P$	$4a$	$4a$	$2a$	$2a$	$2l$	$1,2l$	$2l$	l
8	P	$2P$	$-3P$	$0,9P$	$4a$	$3a$	a	$2a$	$0,6l$	$1,3l$	$2l$	$2l$
9	P	$-4P$	$2,5P$	$-2P$	a	a	$2a$	$2a$	$0,5l$	l	$1,4l$	l
0	P	$2P$	P	$-2P$	$4a$	$3a$	$2a$	$3a$	l	$2l$	$0,5l$	l
Буква шифра	в	г	д	д	в	г	в	в	г	д	в	г

Примечание. Знак « $-$ » в выражениях для P_i в табл. 10.3 означает, что сила P_i на рис. 10.1 направлена в обратную сторону.

10.3. Расчет статически неопределимого стержня

Задача 2

Стержень постоянного круглого поперечного сечения зашпемлен обоими торцами и нагружен продольными силами (рис. 10.2).

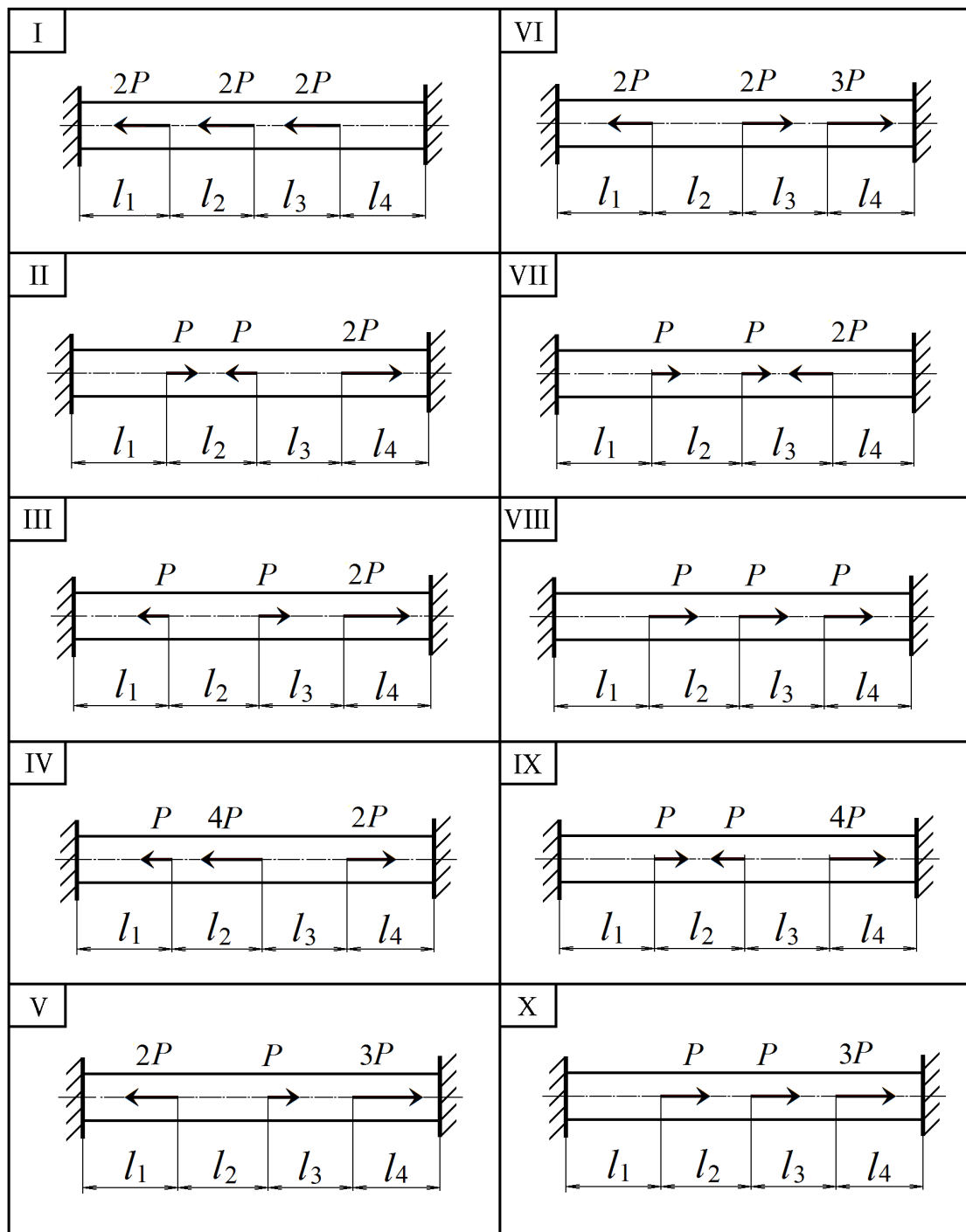


Рис. 10.2. Расчетные схемы статически неопределимого стержня

Раскрыть статическую неопределимость, построить эпюру нормальных усилий N и эпюру линейных перемещений Δ для стержня.

Расчетную схему принять по рис. 10.2. Данные для расчета принять по табл. 10.4 при $l = 100$ мм, $P = 10$ кН.

Выполнить проектный расчет на прочность, считая, что стержень изготовлен из материала сталь с характеристиками $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и $[\sigma] = 160$ МПа.

Таблица 10.4

Исходные данные к задаче 2

Номер строки	Номер схемы по рис. 10.2	l_1	l_2	l_3	l_4
1	I	l	$1,8l$	$0,2l$	$0,4l$
2	II	$1,2l$	$1,6l$	$0,4l$	$0,6l$
3	III	$1,4l$	$1,4l$	$0,6l$	$0,8l$
4	IV	$0,6l$	$1,2l$	$0,8l$	l
5	V	$1,8l$	l	l	$2,0l$
6	VI	$2,0l$	$1,2l$	$1,2l$	l
7	VII	$1,6l$	$0,4l$	$1,4l$	$1,6l$
8	VIII	$2,4l$	$0,6l$	$1,6l$	$1,6l$
9	IX	$2,0l$	$0,8l$	$0,8l$	$2,0l$
0	X	$2,0l$	l	$2,0l$	$1,2l$
Буква шифра	а	б	в	г	д

Задача 3

Выполнить проверочный расчет на прочность ступенчатого статически неопределимого стержня с учетом монтажных и температурных напряжений, возникающих в нем при эксплуатации: неточность изготовления стержня по длине составляет Δ_0 , стержень эксплуатируется при температуре T и на него действуют усилия P в соответствии с расчетной схемой, представленной на рис. 10.3. Исходные данные для расчета принять в соответствии с табл. 10.5.

Считаем, что на всех участках стержень имеет круглое сплошное поперечное сечение диаметром $D_1 = D$ на тонком участке, $D_2 = 1,2D$ на утолщенном участке.

Для численных расчетов принять $l = 0,4$ м, $D = 10$ мм, $P = 10$ кН.

Провести полный анализ НДС на участках стержня при его сборке, температурном и эксплуатационном воздействии.

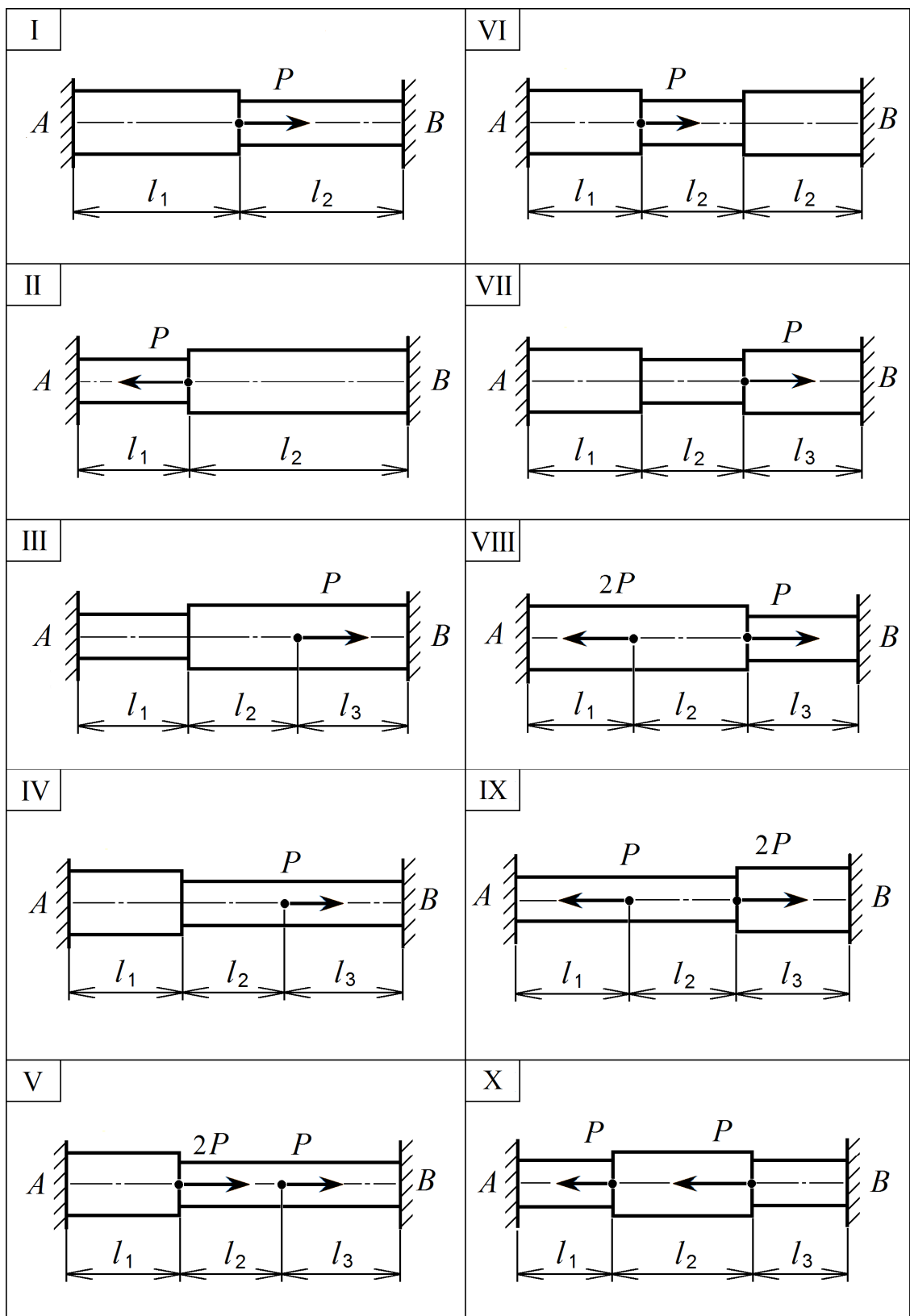


Рис. 10.3. Расчетные схемы для задачи 3

Исходные данные для задачи 3

Но- мер стро- ки	Схема по рис. 10.3	l_1	l_2	l_3	Δ_0 , мм	T , °C	Материал	$E \cdot 10^{-5}$, МПа	σ_T , МПа	КЛТР $\alpha \cdot 10^6$, °C ⁻¹
1	I	l	l	$0,5l$	0,5	50	Сталь 40Х	2,18	800	13,5
2	II	$0,5l$	l	$0,5l$	-0,4	60	Сталь 45	2,04	360	13,0
3	III	$0,8l$	$0,6l$	$0,8l$	0,6	70	Сталь 30ХГСА	1,98	1000	11,0
4	IV	$1,2l$	l	$0,8l$	-0,5	80	Алюми- ниевый сплав АМг6	0,7	170	24,7
5	V	$0,8l$	$0,5l$	$0,8l$	0,6	-50	Алюми- ниевый сплав Д16	0,71	290	22,7
6	VI	l	$2l$	$0,5l$	-0,6	-40	Титан ВТ1	1,12	470	8,0
7	VII	$2l$	l	$0,5l$	0,3	-30	Титан ВТ14	1,15	1000	8,5
8	VIII	l	$0,8l$	$0,8l$	-0,4	-60	Латунь ЛС59	1,05	450	20,6
9	IX	$1,2l$	l	$0,6l$	0,2	100	Латунь ЛС68	1,15	520	19,0
0	X	l	$1,5l$	$0,6l$	-0,2	-60	Бронза БрАМц9	1,05	500	18,5
Буква шифра	а	в	г	д	в	г	д			

П р и м е ч а н и я: 1. Знак «+» в Δ_0 указывает на то, что стержень изгото-
товлен длиннее, а знак «-» – короче на указанную величину.

2. При $T > 0$ имеет место нагрев стержня, $T < 0$ – охлаждение. Нор-
мальная температура принимается равной $T_0 = 20$ °C.

10.4. Расчет геометрических характеристик поперечного сечения

Задача 4

Для заданного поперечного сечения (рис. 10.4) вычислить
геометрические характеристики $J_x, J_y, W_x, W_y, i_x, i_y$ относительно
главных центральных осей x и y .

При расчете принять $b_1 = k_1 b$, $b_2 = k_2 b$, $b_3 = k_3 b$.

Значения коэффициентов k_1, k_2, k_3 и вид поперечного сечения
выбираем по табл. 10.6 в соответствии с заданным вариантом расчета.

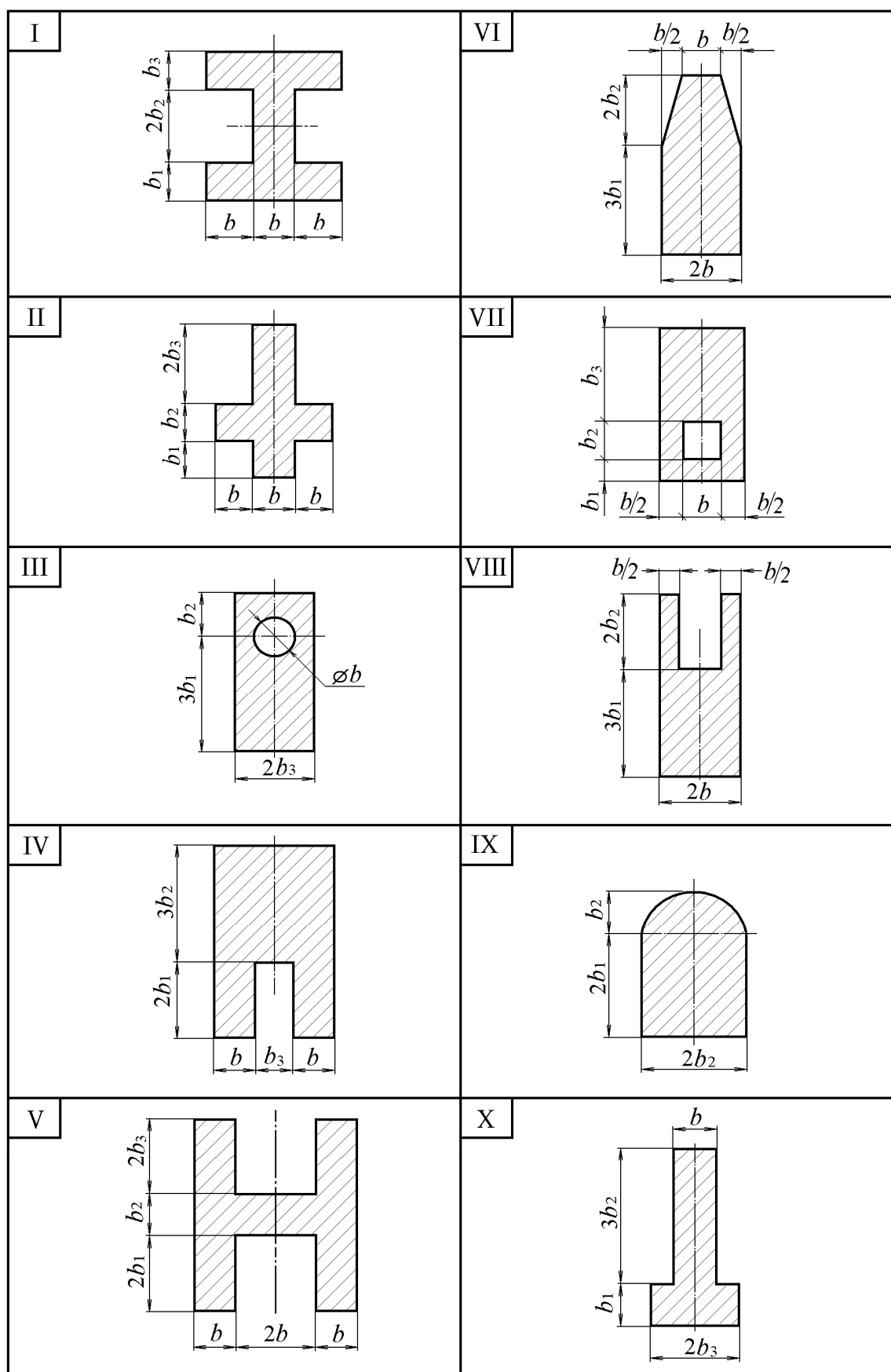


Рис. 10.4. Вид поперечного сечения

Все геометрические характеристики поперечного сечения вычислить через параметр сечения b аналогично п. 3.2.

Результаты расчета представить в виде таблицы аналогично табл. 3.1 в п. 3.2 пособия.

Таблица 10.6

Исходные данные к задаче 4

Номер строки	Номер схемы по рис. 10.4	Значения коэффициентов		
		k_1	k_2	k_3
1	I	1,0	1,0	1,0
2	II	1,1	0,8	1,2
3	III	1,2	0,9	1,4
4	IV	1,3	0,7	1,6
5	V	1,4	0,6	1,8
6	VI	1,5	1,2	2,0
7	VII	1,6	1,1	1,0
8	VIII	1,7	0,8	1,2
9	IX	1,8	1,0	1,4
0	X	0,9	0,9	1,6
Буква шифра	а	б	в	г

10.5. Расчет на кручение трансмиссионного вала

Задача 5

Выполнить проектный расчет трансмиссионного стального вала постоянного поперечного сечения. Вал посажен на подшипниковые опоры. К шкиву 1 подводится мощность N_1 , которая передается оборудованию через шкивы 2, 3 и 4 в соответствии с расчетной схемой, представленной на рис. 10.5. Трение в опорах отсутствует.

Вал вращается с частотой n мин⁻¹. Исходные данные принять по табл. 10.7.

Таблица 10.7

Исходные данные для задачи 5

Номер строки	Номер схемы по рис. 10.5	N_2	N_3	N_4	n	l_1	l_2	l_3
		кВт	кВт	кВт	мин ⁻¹	м	м	м
1	I	40	20	15	400	1,0	0,5	0,5
2	II	50	25	20	600	0,5	1,0	0,5
3	III	35	20	30	300	0,6	0,8	0,6
4	IV	60	30	20	200	0,7	1,0	0,4
5	V	25	40	25	450	0,6	0,7	0,9
6	VI	40	20	20	500	0,5	0,5	0,5
7	VII	60	35	20	550	0,4	0,5	0,6

Номер строки	Номер схемы по рис. 10.5	N_2	N_3	N_4	n	l_1	l_2	l_3
		кВт	кВт	кВт	мин ⁻¹	м	м	м
8	VIII	35	20	30	350	0,6	0,4	0,5
9	IX	45	40	25	400	0,5	0,6	0,7
0	X	30	25	30	300	0,8	1,0	0,4
Буква шифра	а	б	в	г	д	а	г	д

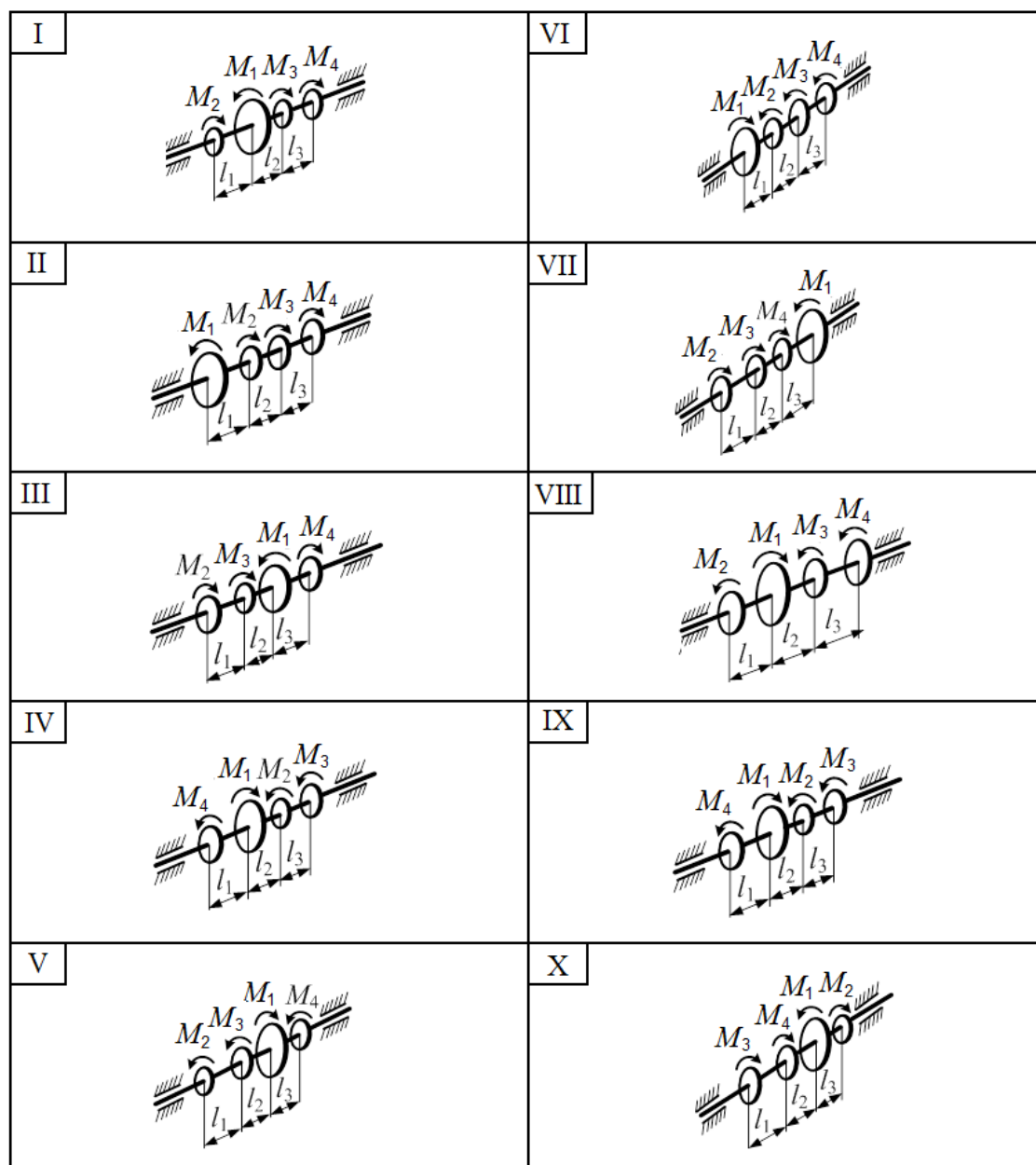


Рис. 10.5. Расчетная схема для трансмиссионного вала

При выполнении расчетов принять:

- материал вала – сталь;
- модуль сдвига $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа;
- допускаемые касательные напряжения $[\tau] = 60$ МПа;
- допускаемый относительный угол закручивания вала $[\theta] = 0,4$ град/м.

Расчет выполнить для двух вариантов исполнения трансмиссионного вала:

- вал является сплошным с внешним диаметром D ;
- вал имеет кольцевое поперечное сечение с внешним диаметром D и внутренним отверстием d . При расчете принять $c = d/D = 0,7 \dots 0,8$.

Из двух вариантов окончательно выбрать оптимальное поперечное сечение трансмиссионного вала. Оптимальным считается вал, имеющий минимальный вес при обеспечении его прочности и жесткости.

10.6. Расчет стальной балки на прочность

Задача 6

Для стальной балки, нагруженной в соответствии с расчетной схемой, из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать размеры поперечного сечения.

Расчет выполнить для пяти вариантов поперечного сечения:

- двутавр;
- швеллер;
- прямоугольное с соотношением сторон $h/b = 2$;
- круглое сплошное с внешним диаметром D ;
- кольцевое с соотношением диаметров $c = d/D = 0,7$.

Выбрать наиболее рациональное поперечное сечение и для него построить эпюры нормальных напряжений в опасных поперечных сечениях балки. Исходные данные для расчета принять по табл. 10.8 и рис. 10.6, полагая, что $P = qa$, $m = Pa = qa^2$, $q = 10$ кН/м, $a = 1$ м.

Коэффициент запаса прочности по текучести принять $n_T = 1,5$; допускаемые касательные напряжения принять $[\tau] = 0,6[\sigma]$.

Для балки с рациональным поперечным сечением методом начальных параметров построить упругую линию балки. Для этого вычислить прогибы в точках K и L , показанных на расчетной схеме (см. рис. 10.6).

Исходные данные для задачи 6

Номер строки	Схема по рис. 5.1	Внешние нагрузки						Материал балки				
		m_1	m_2	P_1	P_2	q_1	q_2	Сталь		Чугун		
								Марка	Предел текучести σ_{τ} , МПа	Марка	Предел прочности, МПа	
											при растяжении $\sigma_{\text{вр}}$	при сжатии $\sigma_{\text{вс}}$
1	I	m	$2m$	P	$2P$	q	q	20	240	СЧ35	350	1200
2	II	$2m$	m	P	P	q	$2q$	40X	800	СЧ25	280	1000
3	III	m	$2m$	$2P$	$2P$	q	$2q$	30	300	СЧ15	120	500
4	IV	$2m$	$2m$	P	$2P$	q	q	40XH	900	СЧ25	280	1000
5	V	m	m	$2P$	P	$2q$	q	40	340	СЧ35	350	1200
6	VI	$3m$	m	$2P$	P	$2q$	q	20	240	СЧ25	280	1000
7	VII	$2m$	m	P	$2P$	$2q$	q	50	380	СЧ10	120	500
8	VIII	m	m	P	P	q	$2q$	40XH	900	СЧ25	280	1000
9	IX	m	m	$2P$	$2P$	q	q	30	300	СЧ35	350	1200
0	X	$2m$	m	P	P	$2q$	q	40XH	900	СЧ10	120	500
Буква шифра	а	б		д		г		в		д		

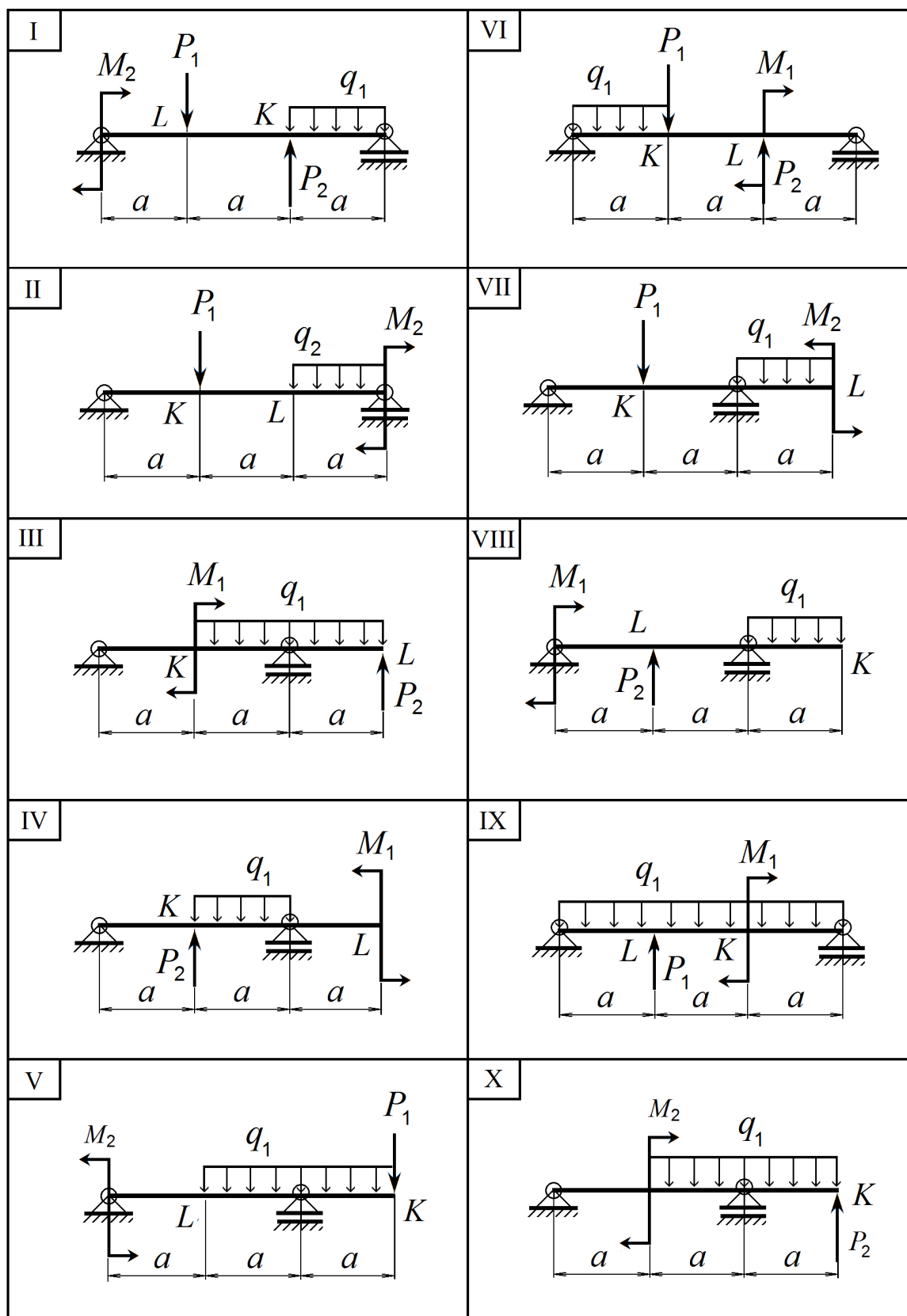


Рис. 10.6. Расчетная схема стальной балки

10.7. Расчет чугуновой балки на прочность

Задача 7

Чугунная балка, нагруженная, как показано на рис. 10.7, имеет поперечное сечение, вид которого выбирается в соответствии с вариантом из задачи 4.

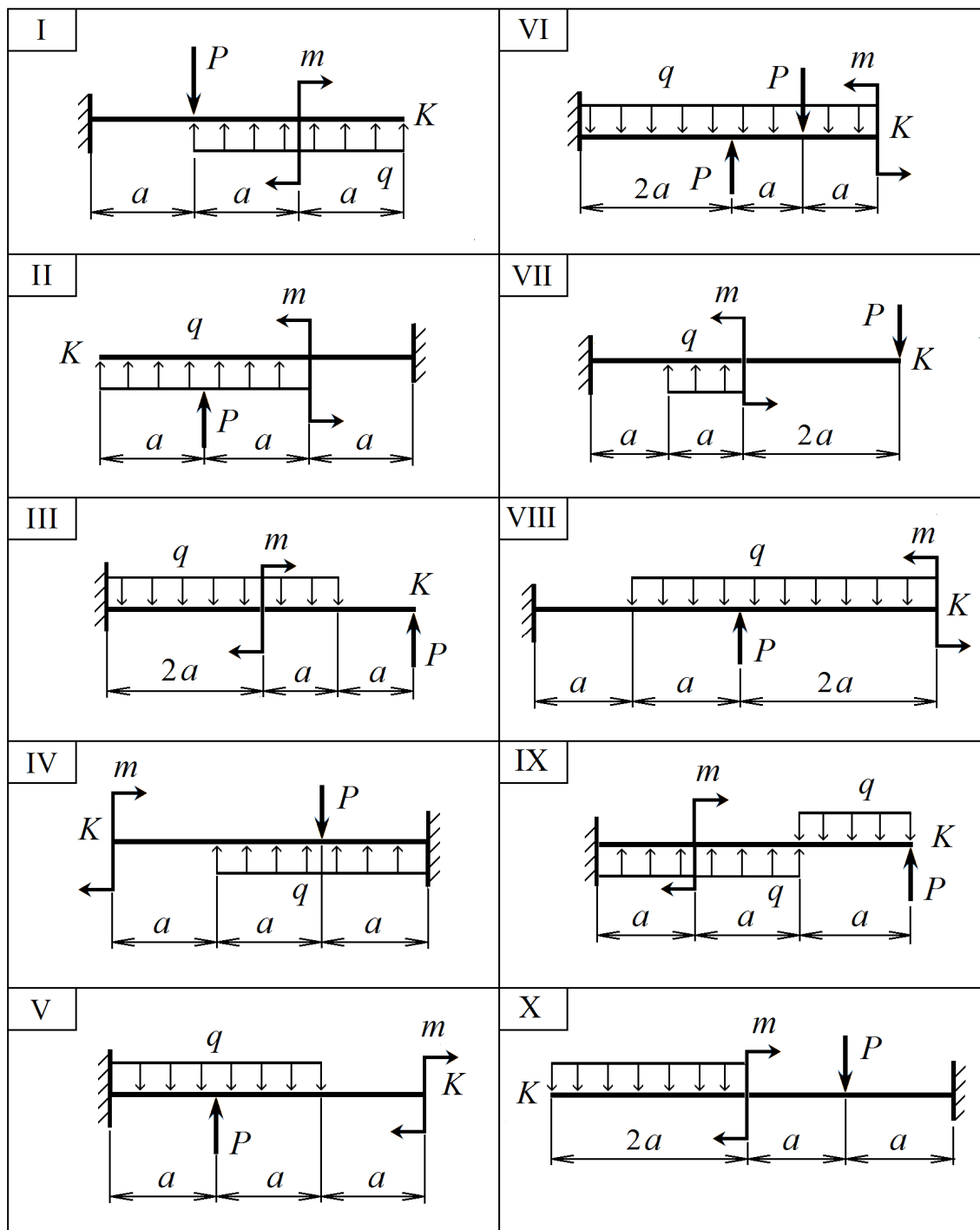


Рис. 10.7. Расчетные схемы для чугуновой балки

Требуется выполнить следующее:

1. Подобрать размеры поперечного сечения из условий прочности по нормальным напряжениям.
2. Построить эпюры нормальных напряжений.
3. Проанализировать эпюру нормальных напряжений и выбрать рациональное (с точки зрения прочности) расположение поперечного сечения.
4. Вычислить прогиб в точке K балки методом начальных параметров.

Исходные данные взять из табл. 10.8 для чугунной балки, полагая $m = qa^2$, $P = qa$, $a = 0,5$ м, $q = 10$ кН/м.

Коэффициент запаса прочности принять $n_b = 2$.

10.8. Расчет на прочность при пространственном изгибе

Задача 8

Балка прямоугольного поперечного сечения нагружена двумя одинаковыми сосредоточенными силами P в главных плоскостях в соответствии с рис. 10.8. В точке A сила действует вертикально, в точке B – горизонтально.

Требуется:

- 1) из условия прочности по нормальным напряжениям определить требуемые размеры поперечного сечения балки;
- 2) построить пространственную эпюру нормальных напряжений для опасного сечения балки;
- 3) определить величину и направление полного прогиба f в сечениях A и B , построить в этих сечениях схемы линейных перемещений.

Расчет на прочность выполняется согласно п. 6.2. Перемещения в главных плоскостях определяются методом начальных параметров.

Исходные данные для расчета принять по табл. 10.9.

Материал балки – деревопластик, модуль упругости $E = 1 \cdot 10^4$ МПа, допускаемые напряжения $[\sigma] = 10$ МПа.

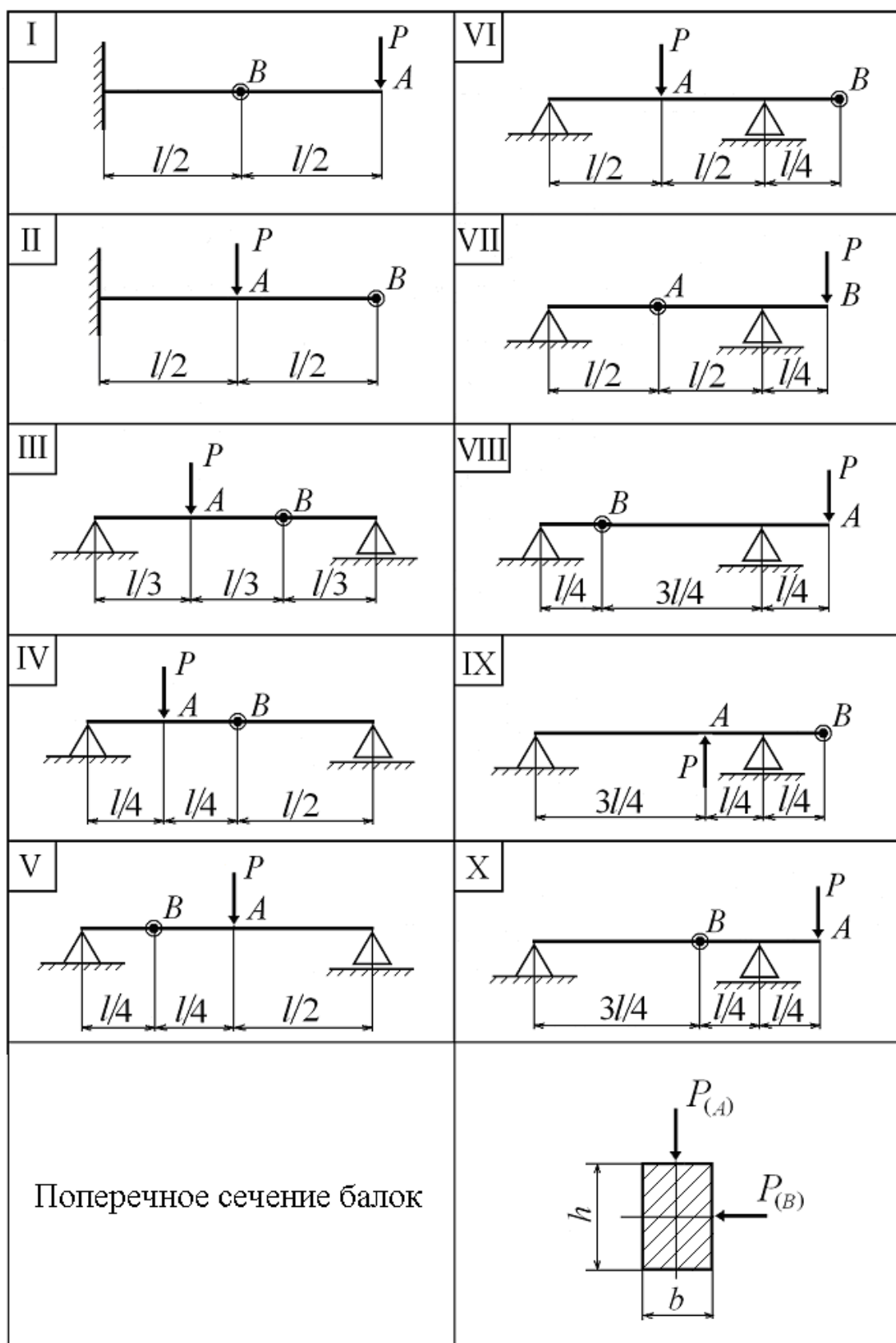


Рис. 10.8. Расчетные схемы при пространственном изгибе балки

Исходные данные для задачи 8

Номер строки	Схема по рис. 10.8	P , кН	l , м	$n = \frac{h}{b}$
1	I	8	1,1	2,2
2	II	2	1,2	2,4
3	III	3	1,3	1,6
4	IV	4	1,4	1,4
5	V	5	1,5	1,5
6	VI	6	1,6	1,6
7	VII	7	1,7	2,5
8	VIII	8	1,8	1,8
9	IX	6	1,9	1,9
0	X	10	2,0	2,0
Буква шифра	а	б	в	г

10.9. Расчет трансмиссионного вала при сложном напряженном состоянии

Задача 9

На вал насажены два шкива, через которые перекинута ремни (рис. 10.9). Ветви ремней параллельны друг другу и наклонены к горизонту под углами α_1 и α_2 .

От первого шкива ремень идет к электродвигателю; в этом ремне усилие в сбегающей ветви вдвое больше, чем в набегающей.

От второго шкива ремень идет к станку; в этом ремне усилие в набегающей ветви вдвое больше, чем в сбегающей. Станок имеет мощность N (кВт), частоту вращения вала n (об/мин). Материал вала – Сталь 20 с пределом текучести $\sigma_T = 240$ МПа; нормативный коэффициент запаса прочности $n_T = 1,5$.

Используя четвертый критерий прочности, определить необходимый диаметр вала, имеющего сплошное поперечное сечение.

Данные для расчета выбрать из табл. 10.10, схему – по рис. 10.9. Принять $D = 0,1$ м; $a = 0,1$ м. Весом шкивов пренебречь. Трением в опорах вала пренебречь.

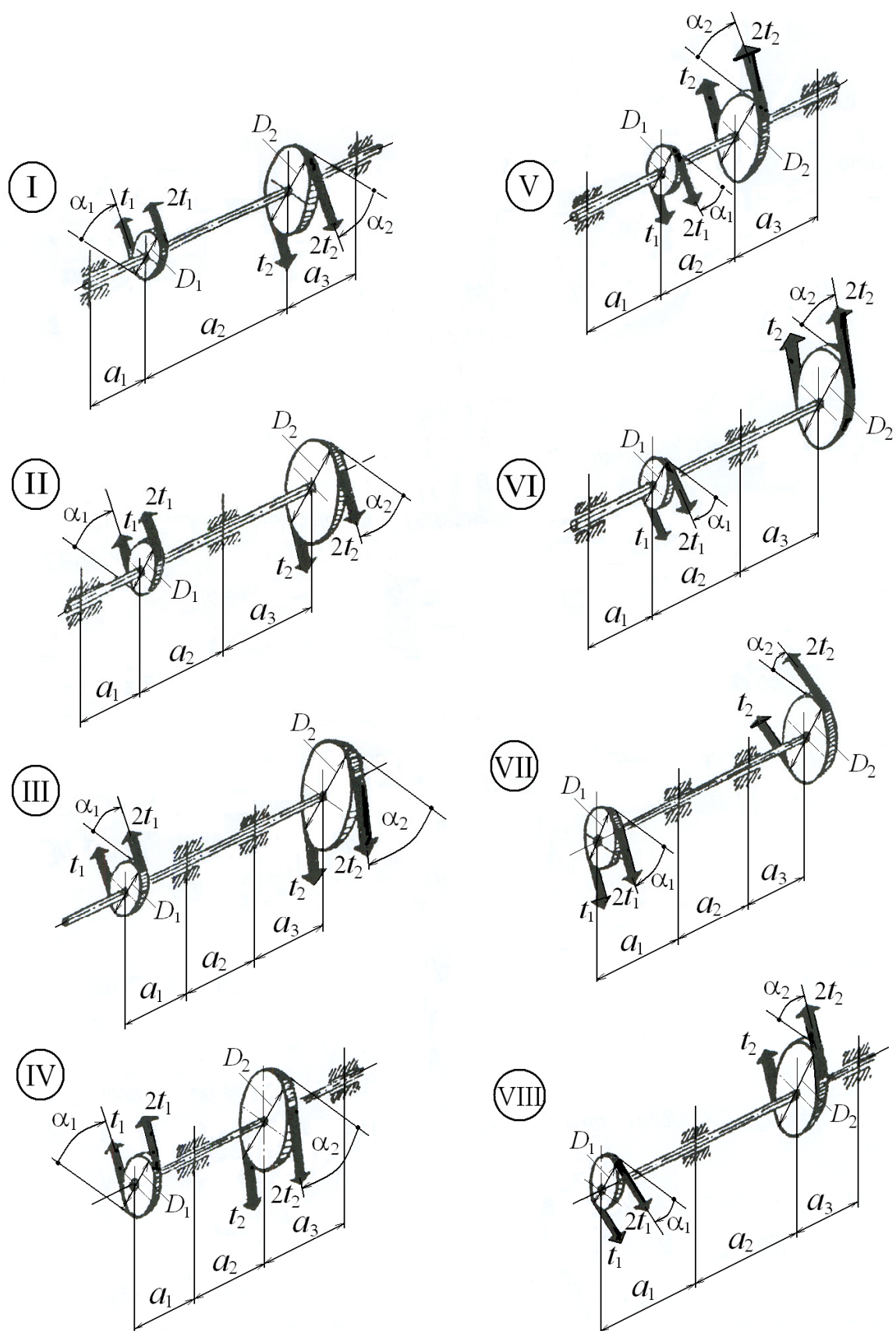


Рис. 10.9. Расчетные схемы трансмиссионного вала

Исходные данные для задачи 9

Номер строки	Схема по рис. 10.9	a_i			D_i		α_1 , град	α_2 , град	N , кВт	n , об/мин
		a_1	a_2	a_3	D_1	D_2				
1	I	$2a$	$3a$	a	$4D$	$6D$	0	30	20	100
2	II	a	$2a$	a	$3D$	$4D$	90	60	40	200
3	III	$2a$	a	a	$3D$	$5D$	45	0	30	120
4	IV	$3a$	a	a	$2D$	$4D$	90	45	20	80
5	V	a	$3a$	a	$2,4D$	$5D$	0	45	25	160
6	VI	a	a	$2a$	$3,2D$	$6,4D$	60	0	35	100
7	VII	a	a	$3a$	$3D$	$4,5D$	30	90	40	120
8	VIII	$2a$	a	$2a$	$4D$	$5D$	90	30	25	140
9	III	a	a	$2a$	$2,5D$	$4D$	60	45	25	140
0	V	a	$2a$	a	$3D$	$5,5D$	50	30	35	150
Буква шифра	а	в	г	д	в	г	д	д	г	в

10.10. Расчет на устойчивость

Задача 10

Определить допускаемое значение силы $[P_y]$ из расчета на устойчивость стержня.

Коэффициенты запаса устойчивости для стали $n_y = 2,5$ и для чугуна $n_y = 4$.

Опорные закрепления стержня в обеих главных плоскостях одинаковы.

Основные параметры даны в табл. 10.11, расчетные схемы и поперечные сечения стержней приведены на рис. 10.10.

П р и м е ч а н и е. Формула Ясинского $\sigma_{кр}^Y = a - b\lambda + c\lambda^2$ применима, если гибкость стержня λ удовлетворяет условиям:

– для стали: $40 \leq \lambda < \lambda_{пред}$;

– для чугуна: $20 \leq \lambda < \lambda_{пред}$.

При $\lambda \geq \lambda_{пред}$ применяется формула Эйлера.

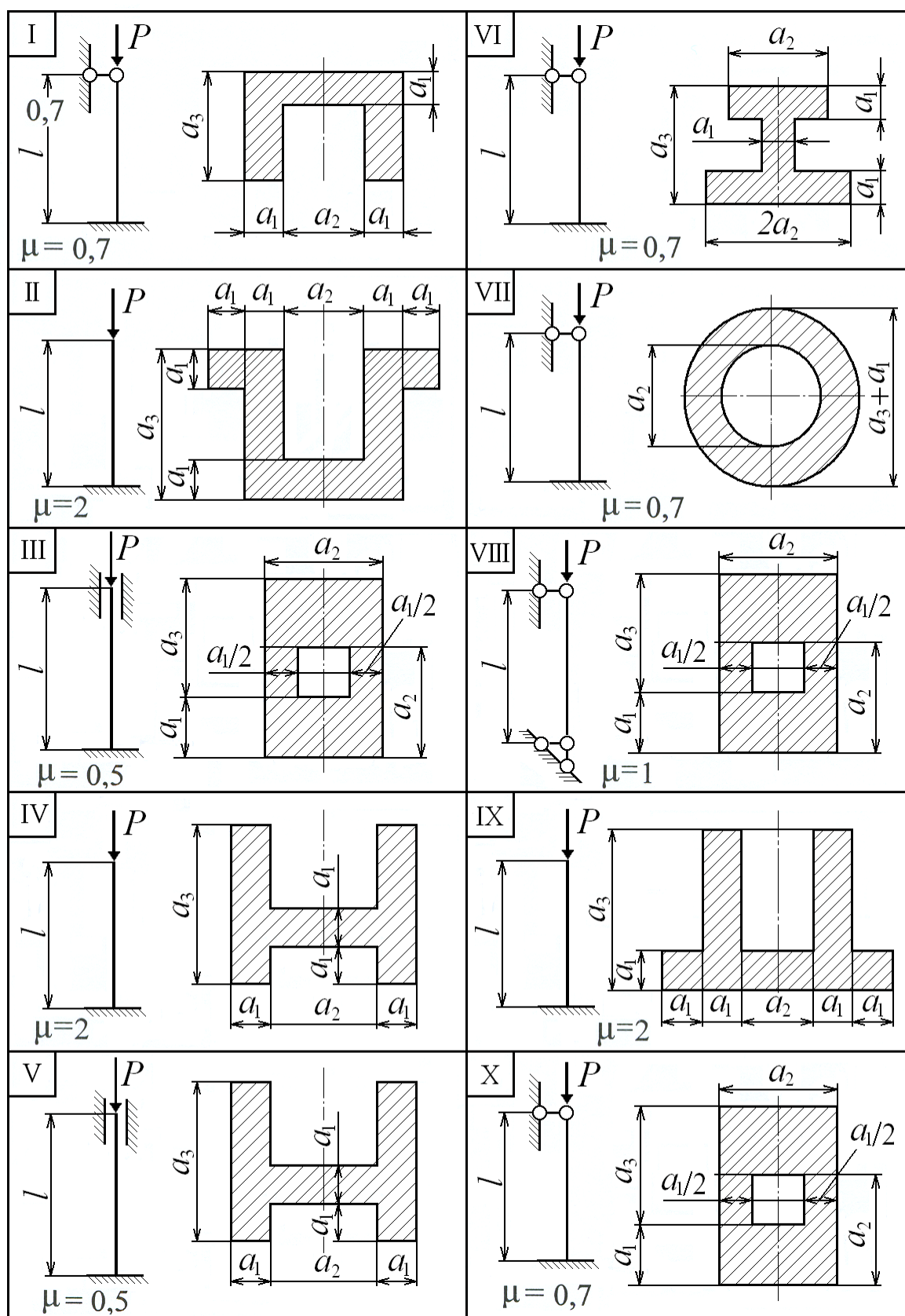


Рис. 10.10. Расчетные схемы сжатого стержня

Таблица 10.11

Исходные данные для задачи 10

Номер строки	Схема по рис. 10.10	l , м	a_1 , мм	a_2 , мм	a_3 , мм	Материал	$E \cdot 10^{-5}$, МПа	$\sigma_{\text{ш}}$, МПа	Коэффициенты Ясинского		
									a , МПа	b , МПа	c , МПа
1	I	1,8	15	35	70	Сталь	2,2	200	310	1,14	0
2	II	1,9	20	45	60		2,1	210	320	1,20	0
3	III	2,2	20	50	70		1,9	230	340	1,30	0
4	IV	2,5	30	60	85		2,1	190	300	1,05	0
5	V	2,7	30	50	80		2,0	250	350	1,30	0
6	VI	3,0	25	55	90	Чугун	1,0	200	780	12,0	0,050
7	VII	1,7	15	50	85		1,1	200	770	12,5	0,051
8	VIII	2,8	25	65	75		1,0	190	700	12,0	0,050
9	IX	2,4	20	45	75		0,9	180	700	11,5	0,050
0	X	2,1	15	40	60		1,0	180	700	11,6	0,051
Буква шифра	а	г	д			в					

10.11. Расчет на ударную нагрузку

Задача 11

На упругую систему (рис. 10.11) в точку K с высоты H падает груз весом Q .

Подобрать размеры поперечного сечения конструкции, изготовленной из малоуглеродистой стали, если

$$\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = 320 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

коэффициент запаса прочности $n = 2$; массу упругой системы не учитывать.

Данные, необходимые для решения задачи, выбрать из табл. 10.12.

Для прямоугольных поперечных сечений балок принять $\frac{h}{b} = 2$; для кольцевых сечений принять $c = \frac{d}{D} = 0,7$, где D – внешний, d – внутренний диаметры.

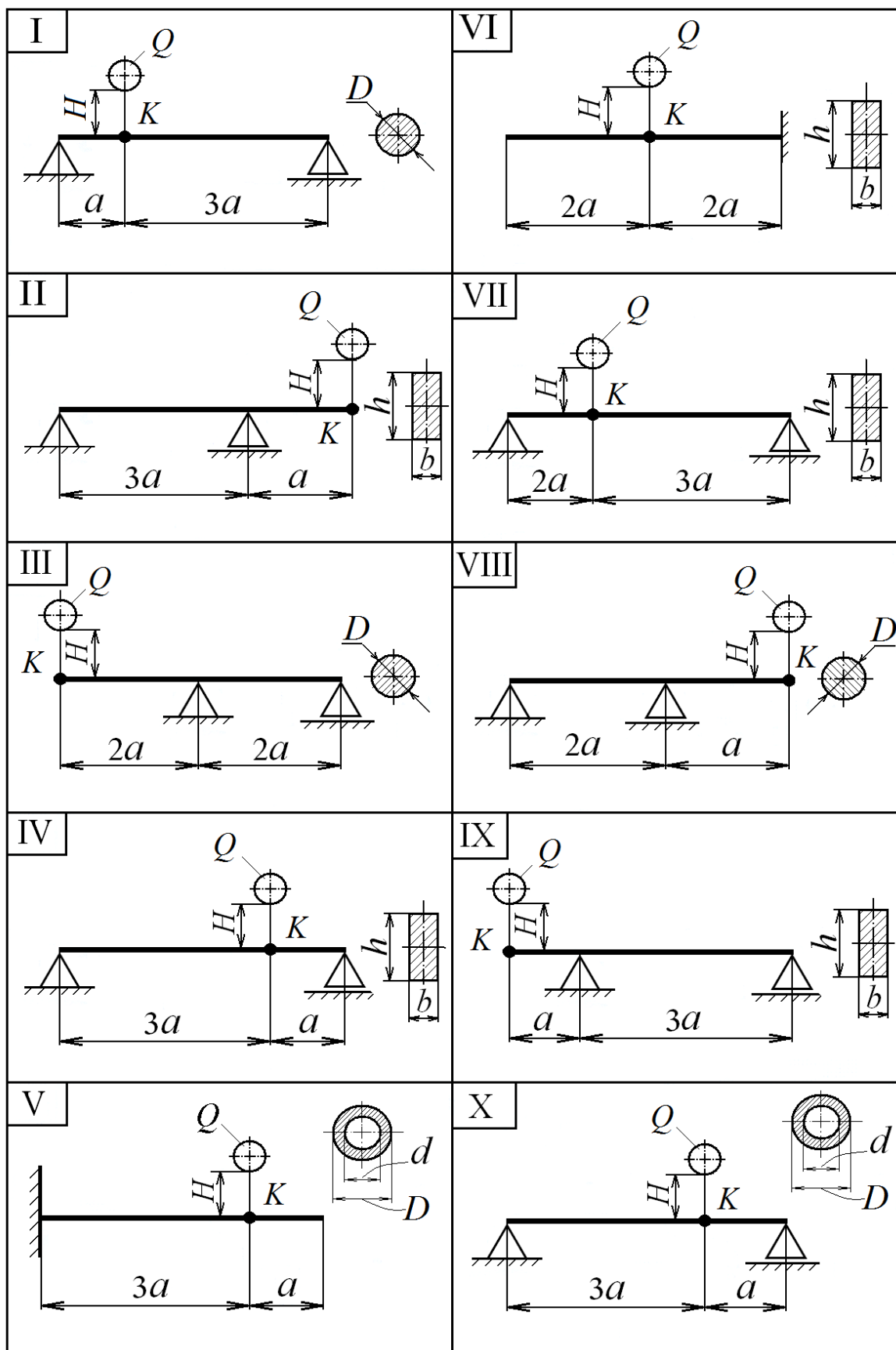


Рис. 10.11. Расчетные схемы для задачи 11

Исходные данные для задачи 11

Номер строки	Схема по рис. 10.11	Q , Н	H , м	a , м
1	I	200	0,5	1,0
2	II	400	0,4	1,2
3	III	600	0,2	1,5
4	IV	800	0,4	1,0
5	V	1000	0,1	0,8
6	VI	500	0,3	1,2
7	VII	750	0,3	0,8
8	VIII	800	0,2	1,5
9	IX	900	0,2	1,0
0	X	100	0,5	1,0
Буква шифра	а	г	д	г

10.12. Расчет упругой системы при действии вибрации

Задача 12

Упругая система представляет собой балку, показанную на рис. 10.12. Поперечное сечение балки выполнено в виде двух швеллеров (рис. 10.13,а) или двух двутавров (рис. 10.13,б), жестко соединенных между собой.

В точке K на балке (рис. 10.12) установлен электродвигатель весом Q , частота вращения вала которого равна n мин⁻¹. Сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся деталей электродвигателя, равна $P_{ин}$. Материал балки – прокатная сталь с пределом текучести $\sigma_T = 320$ МПа и модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Данные для варианта задания принять по табл. 10.13 и рис. 10.12.

Требуется определить величину максимальных напряжений в балке и фактический коэффициент запаса ее прочности при действии вибрации.

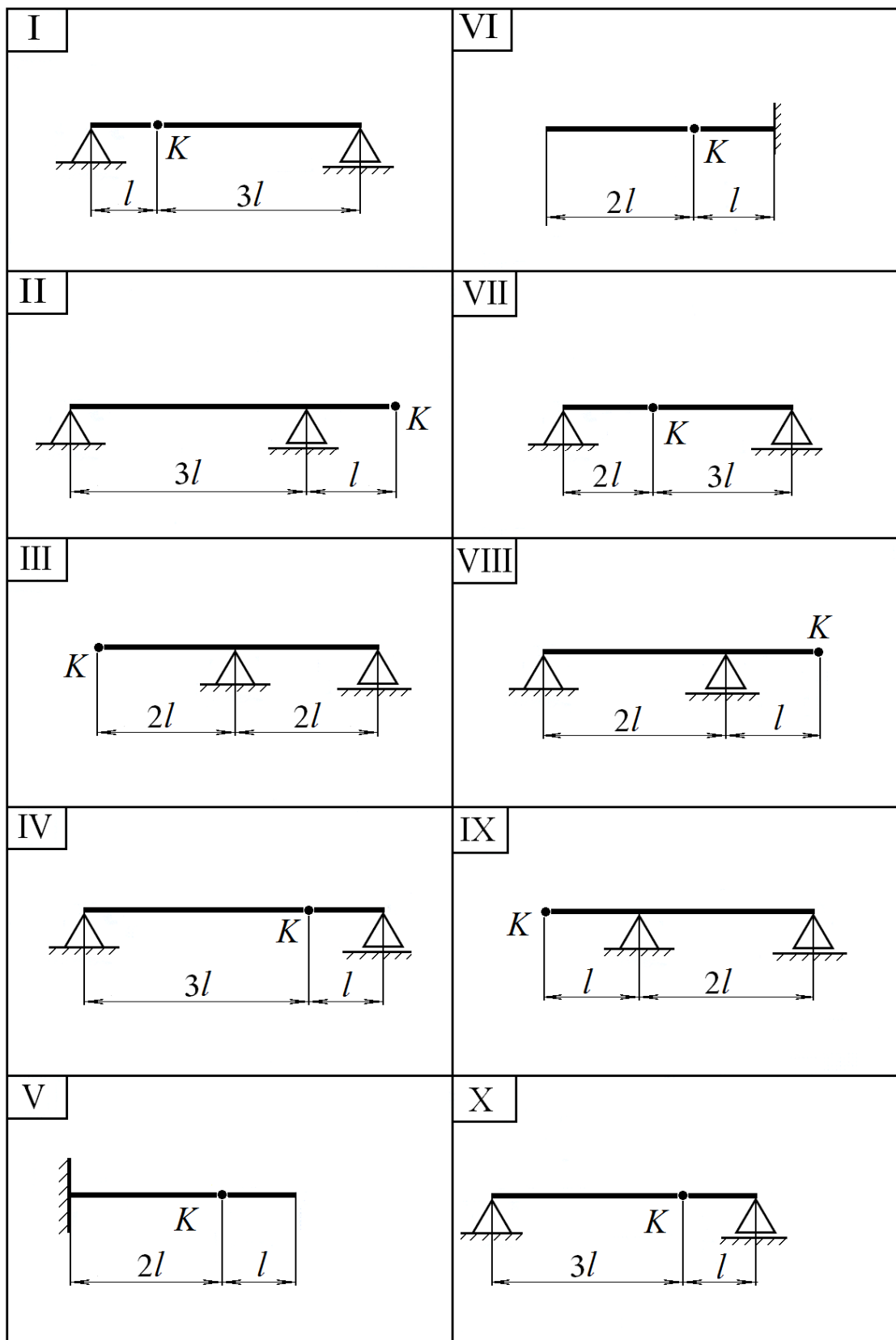


Рис. 10.12. Расчетные схемы балки для задачи 12

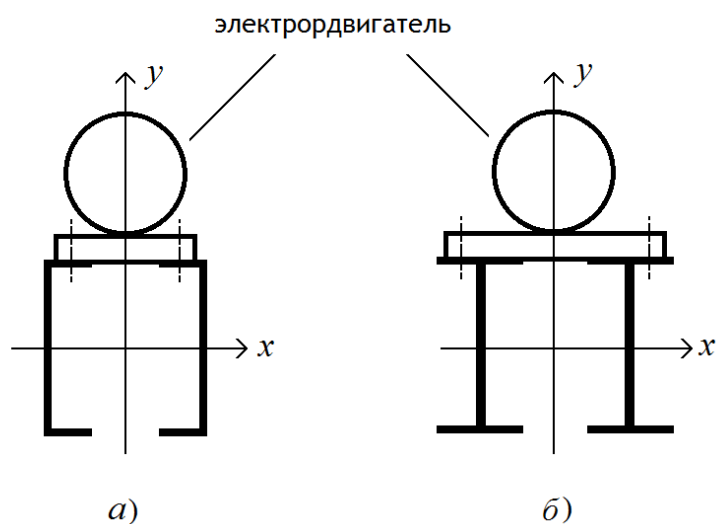


Рис. 10.13. Поперечное сечение балки
с установленным электродвигателем:
а – в виде двух швеллеров; б – в виде двух двутавров

Таблица 10.13

Исходные данные для задачи 12

Номер строки	Схема по рис.10.12	Q , кН	$P_{ин}$, кН	n , мин ⁻¹	l , м	Тип сечения	
						[], №	I I, №
1	I	6,0	0,8	320	0,5	5	
2	II	5,8	0,6	400	0,6		10
3	III	4,8	0,5	510	0,4	8	
4	IV	5,0	0,45	600	0,5		12
5	V	6,2	0,52	1000	0,6	6,5	
6	VI	4,6	0,4	700	0,4		14
7	VII	4,0	0,36	550	0,45	10	
8	VIII	6,4	0,58	480	0,5		10
9	IX	6,6	0,44	800	0,8	12	
0	X	5,9	0,3	360	0,4		16
Буква шифра	а	г	д	б	в	а	г

Заключение

В пособии рассмотрены методы расчета на прочность, жесткость и устойчивость простейших элементов конструкций различного назначения в виде стержней, балок и валов, находящихся под действием силовых, температурных и монтажных нагрузок. Приведены методики расчета контактных напряжений. Рассмотрено действие простейших динамических нагрузок.

В тех случаях, когда элементы конструкций являются более сложными и представляют из себя пластины и оболочки, сосуды, вращающиеся диски и др., расчеты и анализ напряженно-деформационного состояния выполняются с использованием методов теорий пластин и оболочек [3, 12], теории упругости [9]. При расчете элементов конструкций, работающих за пределами упругости, используют методы теории пластичности и ползучести [9].

Приведенные методики расчетов на прочность типовых элементов конструкций основаны на оценке прочности материала в наиболее нагруженных точках по допускаемым напряжениям, что не позволяет в полной мере оценить несущую способность исследуемой конструкции. В связи с этим в последнее время возникла необходимость в развитии нового подхода к оценке прочности конструкции по ее предельному состоянию. При этом под предельным понимается такое состояние конструкции, при котором она полностью теряет способность сопротивляться внешним нагрузкам и не может выполнять свое функциональное назначение.

Методы расчетов по предельному состоянию широко применяются при проектировании конструкций различного назначения, так как позволяют более полно вскрыть резервы прочности, которые не учитываются при расчетах по допускаемым напряжениям. Это позволяет выполнять оптимальное проектирование, способствующее уменьшению металлоемкости и стоимости конструкций при полном обеспечении прочности в жестких условиях их эксплуатации. Практическое применение методов расчета по предельному состоянию основано на использовании методов теорий упругости, пластичности и разрушения [9, 12].

Реализация расчетов на прочность, жесткость и устойчивость на ранних этапах проектирования конструкций различного назначения позволяет анализировать напряженно-деформированное состояние ее элементов и принимать научно обоснованные конструкторско-технологические решения для оптимизации проектируемой конструкции.

Проблемы разрушения элементов конструкций, изготовленных из различных материалов, представляют исключительную важность для всех отраслей современной техники. Особенно большое внимание стало уделяться этой проблеме во второй половине XX в., когда в мировой технической практике увеличилось число катастрофических разрушений сварных судов, роторов турбин и генераторов, корпусов ракет и авиационной техники, резервуаров, сосудов, работающих под высоким давлением, газопроводов и других конструкций, имеющих стратегическое назначение [13].

Решение этой проблемы вызвано необходимостью разработки и практического внедрения в инженерную практику механики разрушения, учитывающей наличие дефектов в конструктивных элементах. Механика разрушения устанавливает связь между напряжениями, приводящими к разрушению конструкции, свойствами материала и критическими размерами дефектов различного типа. Основные подходы в механике разрушения основаны на явлениях, протекающих в макрообъемах материала при наличии дефектов, например в виде макротрещин. Внедрение в инженерную практику методов расчета механики разрушения является весьма перспективным при проектировании высоконадежных конструкций, работающих в экстремальных условиях эксплуатации.

Благодаря развитию различных отраслей техники и нанотехнологий в последнее время при проектировании различных элементов конструкций применяют новые конструкционные материалы, обладающие специальными свойствами [12]. К таким материалам относятся: монокристаллы; композиционные материалы; углепластики; полимеры; техническая керамика; керамо-металлические материалы и др. В последнее время проводятся работы по созданию новых материалов с заранее заданными свойствами.

Представленный в пособии материал будет способствовать повышению качества подготовки специалистов по указанным направлениям. Пособие может быть рекомендовано магистрам, аспирантам и инженерно-техническим работникам, занимающимся вопросами проектирования конструкций в машино-, автомобиле-, приборостроении и при проектировании энерго- и электротехнических установок.

Список литературы

Основная литература

1. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М. : Наука, 2002. 540 с.
2. Степин П. А. Сопротивление материалов. 11-е изд., стер. СПб. : Лань, 2011. 320 с.
3. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев : Наукова думка, 1975. 704 с.
4. Литвинов А. Н., Шорина Н. С. Механика материалов и конструкций. Лабораторный практикум : учеб.-метод. пособие : в 2 ч. / под ред. А. Н. Литвинова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. Ч. 1. 68 с.
5. Литвинов А. Н., Шорина Н. С. Механика материалов и конструкций. Лабораторный практикум : учеб.-метод. пособие : в 2 ч. / под ред. А. Н. Литвинова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. Ч. 2. 61 с.
6. Литвинов А. Н. Механика материалов и конструкций : учеб. пособие. Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. 240 с.
7. Муйземнек А. Ю., Литвинов А. Н., Митрохина Н. Ю., Шорин В. А. Прикладная механика : учеб. пособие. Пенза : Изд-во ПГУ, 2019. 388 с.

Дополнительная литература

8. Литвинов А. Н. Прикладные вопросы механики контактирования деформируемых тел : учеб. пособие. Пенза : Изд-во ПГУ, 2012. 166 с.
9. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М. : Высш. шк., 1982. 264 с.
10. Литвинов А. Н., Денисова Н. Е. Прикладные вопросы теории трения для решения практических задач триботехники : учеб. пособие / под ред. А. Н. Литвинов. Пенза : Изд-во ПГУ, 2008. 220 с.
11. Литвинов А. Н. Моделирование динамических процессов в изделиях приборостроения : монография. Пенза : Изд-во ПГУ, 2011. 198 с.
12. Молотников В. Я. Механика конструкций. Теоретическая механика. Сопротивление материалов : учеб. пособие. СПб. : Лань, 2012. 544 с.
13. Васильченко Г. С., Кошелев П. Р. Практическое применение механики разрушения для оценки прочности конструкций. М. : Наука, 1974. 148 с.
14. Артемова Н. Е., Муйземнек А. Ю., Литвинов А. Н. [и др.]. Выполнение курсовой работы и курсового проекта : учеб. пособие. Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. 232 с.

Приложение 1

Физико-механические характеристики материалов

Марка материала	σ_t , МПа	σ_B , МПа	$E \cdot 10^{-5}$ МПа	μ	δ , %	ψ , %	$a \cdot 10^{-5}$, Н·м/м ² (a , кгс·м/см ²)
1. Сталь							
1.1. Сталь углеродистая обыкновенного качества							
Ст.2	190...220	320...400	2,0	0,24...0,3	26	–	–
Ст.3	210...240	380...470	2,0	0,24...0,3	21...23	–	7...10
Ст.4	240...260	420...520	2,0	0,24...0,3	19...21	–	6...8
Ст.5	260...280	500...620	2,0	0,24...0,3	15...17	–	–
Ст.6	300...310	600...720	2,0	0,24...0,3	11...15	–	–
1.2. Сталь углеродистая качественная							
10	210	340...420	1,9	0,24...0,28	31	55	8
20	250	420...500	2,02	0,24...0,28	15...25	55	8
30	300	500...600	2,0	0,24...0,28	15...20	50	8
40	340	580...700	2,14	0,24...0,28	9...17	45	6
45	360	610...750	2,04	0,24...0,28	16	40	5
50	380	640...800	2,2	0,24...0,28	14	40	4
60	410	690...900	2,08	0,24...0,28	12	35	–
30Г	320	1550...700	2,17	0,24...0,28	20	45	8
60Г	420	710	2,11	0,24...0,28	11	35	–

Марка материала	σ_T , МПа	σ_B , МПа	$E \cdot 10^{-5}$ МПа	μ	δ , %	ψ , %	$a \cdot 10^{-5}$, Н·м/м ² (a , кгс·м/см ²)
1.3. Легированные стали							
20X	400...650	720...850	2,07	0,25...0,3	—		6
40X	650...900	730...1060	2,18	0,25...0,3	3...12	50	6
45X	700...950	850...1050	2,11	0,25...0,3	3...12	50	5
30XM	540...850	740...1000	2,13	0,25...0,3	3...12	50	8
40XH	800...1300	1000...1450	2,04	0,25...0,3	3...12	50	7
12XH3A	700...1100	950...1400	2,04	0,25...0,3	3...12	50	9
20XH3A	850...1100	950...1450	2,04	0,25...0,3	3...12	50	10
40XHMA	850...1600	1100...1700	2,04	0,25...0,3	3...12	50	10
30XГСА	850...1500	1100...1700	1,98	0,25...0,3	до 7	40	5
2. Чугуны							
2.1. Серые чугуны							
СЧ15-32	—	150/650	0,8...1,5	0,23...0,27	—	—	—
СЧ 21-40	$\sigma_T=0,75\sigma_B$	210/950	0,85	0,23...0,27	—	—	0,9
СЧ35-56	$\sigma_T=0,85\sigma_B$	350/1200	1,45	0,23...0,27	1,0...1,2	—	1,1
2.2. Ковкие чугуны							
КЧ 30-6	190/210	≥300	1,55	0,23	≥6	≥7	1,2
КЧ 35-10	220/240	≥350	1,66	0,27	≥10	≥11	1,4
КЧ 37-12	230/250	≥370	1,98	0,26	≥12	≥13	1,6
2.3. Высокопрочные чугуны							
ВЧ 45-0	350...400	450/1500	1,3...1,6	—	0,4...1,4	—	0,5...1,5
ВЧ 60-2	420...550	600/2000	1,8	—	2...3		1,5...3,0
ВЧ 40-10	300...400	450/2100	1,6	—	10	—	5,0...7,0

Марка материала	σ_t , МПа	σ_B , МПа	$E \cdot 10^{-5}$ МПа	μ	δ , %	ψ , %	$a \cdot 10^{-5}$, Н·м/м ² (a , кгс·м/см ²)
3. Цветные металлы и сплавы							
3.1. Алюминиевые сплавы							
АМцМ	50	130	0,71	0,3	23	70	–
АМг6	170	320	0,7	0,3	24	–	–
Д1	110	210	0,71	0,31	18	58	3
Д16	290	440	0,71	0,31	11	15	–
3.2 Медные сплавы							
Медь	75...150	220...450	0,8...1,3	0,31...0,34	6...16	–	–
Латуни:							
Л68	520	660	1,15	0,32...0,42	3	–	–
ЛА 77–2	140	650	1,1	0,32...0,42	12	–	–
ЛМц 58–2		700	1,05	0,32...0,42	10		–
Л59–1		650	1,05	0,32...0,42	16		–
Бронзы:							–
Бр 0–10	140	250	3,0	0,32...0,35	11	–	–
Бр А–5	500	800	1,1	0,32...0,35	4		–
Бр КМц3–1	100...200	650...750	1,04	0,32...0,35	5...10	–	13...17
4. Титан и его сплавы							
В Т1	470	610	1,12	0,32	20...30	≥ 45	≥ 7
ВТ8	950...1100	1050...1180	1,1	0,3	9...15	30...55	3...6
ВТ3–1	850...1100	950...1200	1,15	0,3	10...16	25...40	3...6
ВТ14	850...1100	950...1200	1,15	0,3	6...10	25...35	2,5...5

Марка материала	σ_t , МПа	σ_B , МПа	$E \cdot 10^{-5}$ МПа	μ	δ , %	ψ , %	$a \cdot 10^{-5}$, Н·м/м ² (a , кгс·м/см ²)
5. Пластмассы (усредненные характеристики)							
Стеклотекстолиты	122...260	260...400	0,18...0,22	0,035...0,45	—	—	0,5...5,2
Текстолиты	70...80	70...110	0,04...0,1	—	—	—	0,35
Органическое стекло	—	50...108	0,27...0,041	—	2,5	—	—
Винипласт	—	40...60	0,03...0,04	0,354	10...100	—	0,5...0,8
Полистирол	—	35	0,012...0,032	—	0,4...0,7	—	0,16...0,2
Фтормпласт-4	—	14...25	0,005...0,008	—	300...500	—	—
6. Другие материалы							
Каучук натуральный	—	16...38	(0,6...1)10 ⁻⁴	0,48	600...700	—	—
Стекло	—	30...90	0,48...0,85	0,18...0,32	—	—	0,015...0,025
Гранит	—	3,0/120	0,49				
Сосна (15 % влажности)	61	93	0,102...0,145	0,48	—	—	0,18...0,23

Пояснения к таблице: σ_t – предел текучести при растяжении; σ_B – предел прочности при растяжении; E – модуль упругости первого рода; μ – коэффициент Пуассона; δ – относительное удлинение; ψ – относительное сужение; a – ударная вязкость.

Примечания к таблице:

- прочерк в графе обозначает отсутствие данных;
- интервал значений указывает наименьшее и наибольшее значения величины;
- отсутствие интервала обозначает наименьшее значение величины.

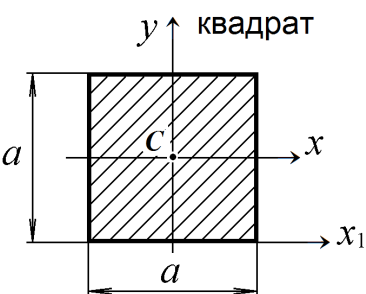
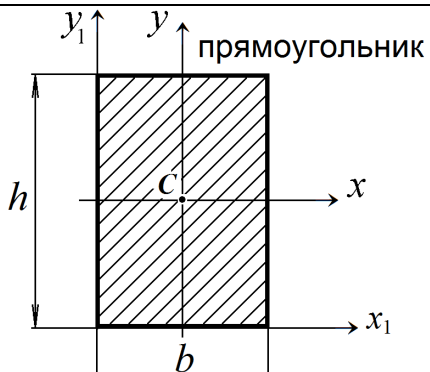
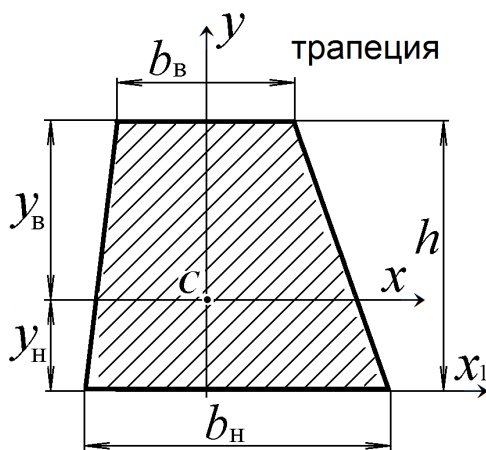
* для чугунов значения пределов прочности приведены в виде дроби: σ_B при растяжении / σ_B при сжатии;

** для цветных металлов и сплавов значения физико-механических характеристик приведены для твердого состояния.

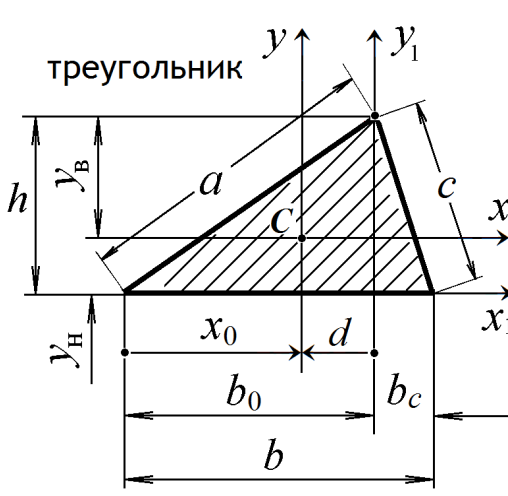
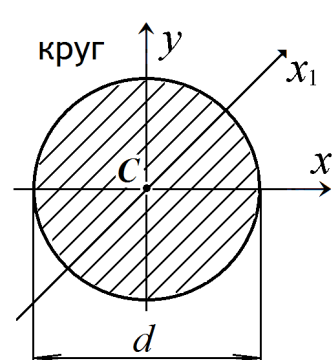
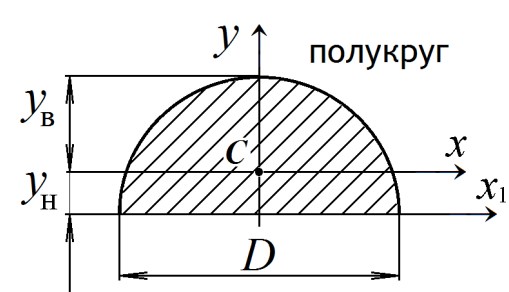
Все характеристики приведены для нормальных условий при температуре 20 °С.

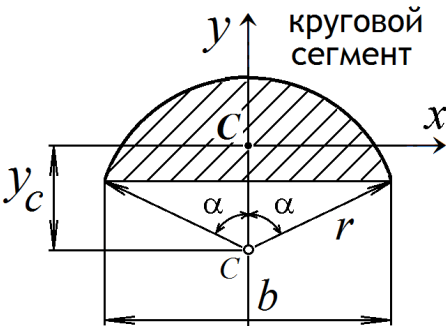
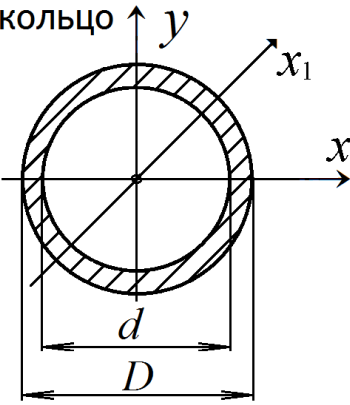
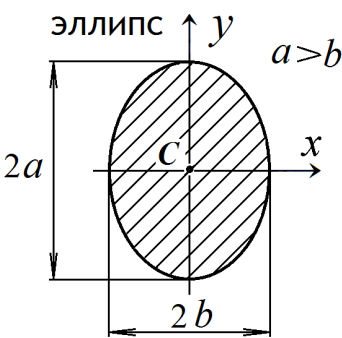
Приложение 2

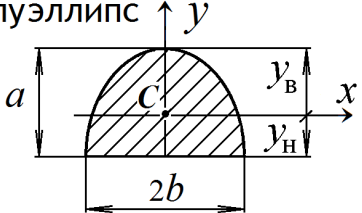
Геометрические характеристики плоских сечений (С – центр тяжести сечения)

Вид сечения (фигуры)	Расчетные формулы и характеристики
квадрат 	$F = a^2;$ $J_x = J_y = \frac{a^4}{12};$ $J_{x1} = \frac{a^4}{3};$ $W_x = \frac{a^3}{6}$
прямоугольник 	$F = bh;$ $J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12};$ $W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6};$ $J_{x1} = \frac{bh^3}{3}; \quad J_{y1} = \frac{hb^3}{3}$
трапеция 	$F = \frac{(b_H + b_B)h}{2};$ $y_H = \frac{(b_H + 2b_B)h}{3(b_H + b_B)};$ $y_B = \frac{(2b_H + b_B)h}{3(b_H + b_B)};$ $J_x = \frac{(b_H^2 + 4b_H b_B + b_B^2)h^3}{36(b_H + b_B)};$ $J_{x1} = \frac{(b_H + 3b_B)h^3}{12};$ $W_{xB} = \frac{J_x}{y_B} \text{ (для верхних волокон)}$

Вид сечения (фигуры)	Расчетные формулы и характеристики
$b_H > b_B$ $b_0 = b_H - b_B$ равнобокая трапеция	$F = \frac{(b_H + b_B)h}{2};$ $y_H = \frac{(b_H + 2b_B)h}{3(b_H + b_B)};$ $y_B = \frac{(2b_H + b_B)h}{3(b_H + b_B)};$ $J_x = \frac{h^3(6b_B^2 + 6b_B b_0 + b_0^2)}{36(2b_B + 2b_0)};$ $J_y = \frac{h}{48} \frac{(b_H^4 + b_B^4)}{(b_H - b_B)};$ $W_{xB} = \frac{h^2(6b_B^2 + 6b_B b_0 + b_0^2)}{12(3b_B + 2b_0)};$ $W_y = \frac{h}{24} \cdot \frac{(b_H^4 + b_B^4)}{(b_H^2 - b_H b_B)}$
прямоугольный треугольник	$F = \frac{bh}{2};$ $y_B = \frac{2}{3}h; \quad y_H = \frac{1}{3}h;$ $J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{hb^3}{36};$ $J_{xy} = -\frac{h^4 b^2}{72};$ $W_{xH} = \frac{bh^2}{12}; \quad W_{xB} = \frac{bh^2}{24};$ $J_{x1} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{y1} = \frac{bh^3}{12}$

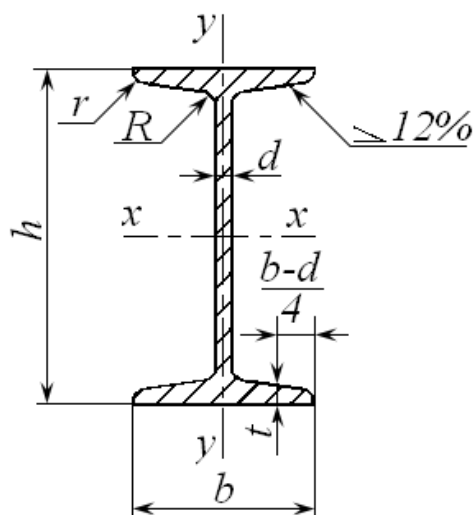
Вид сечения (фигуры)	Расчетные формулы и характеристики
треугольник 	$F = \frac{bh}{2};$ $y_H = \frac{1}{3}h; \quad y_B = \frac{2}{3}h;$ $d = \frac{b_a - b_c}{3}; \quad x_0 = \frac{1}{3}(2b - b_c);$ $J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_{x1} = \frac{bh^3}{12};$ $J_y = \frac{bh(b^2 - b_a \cdot b_c)}{36};$ $W_{x_B} = \frac{bh^2}{24}$
круг 	$F = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0,785d^2;$ $J_x = J_y = J_{x1} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4;$ $J_p = 2J_x = \frac{\pi d^4}{32};$ $W_x = W_y = W_{x1} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3;$ $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$
полукруг 	$F = \frac{\pi D^2}{8};$ $r = \frac{D}{2};$ $y_H = \frac{4r}{3\pi};$ $J_x = \frac{\pi r^4}{8} \left(1 - \frac{64}{9\pi^2} \right);$ $J_{x1} = \frac{\pi r^4}{8}; \quad J_y = \frac{\pi r^4}{8}$

Вид сечения (фигуры)	Расчетные формулы и характеристики
 круговой сегмент	$F = \frac{r^2 \varphi}{2};$ $b = 2r \sin \alpha; \quad \varphi = 2\alpha - \sin 2\alpha;$ $y_c = \frac{4r \cdot \sin^3 \alpha}{3\varphi};$ $J_x = \frac{r^4 \varphi}{8} \left(1 + \frac{4 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha}{\varphi} \right);$ $J_y = \frac{r^4 \varphi}{8} \left(1 - \frac{4 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha}{3\varphi} \right);$ $J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$
 кольцо	$F = \frac{\pi \cdot D^2 (1 - \alpha)}{4};$ $\alpha = \frac{d}{D};$ $J_x = J_y = J_{x1} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4);$ $J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4);$ $W_x = W_y = W_{x1} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4);$ $W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$
 эллипс $a > b$	$F = \pi ab;$ $J_x = \frac{\pi a^3 b}{4}; \quad J_y = \frac{\pi ab^3}{4};$ $W_x = \frac{\pi a^2 b}{4};$ $W_y = \frac{\pi ab^2}{4}$

Вид сечения (фигуры)	Расчетные формулы и характеристики
полуэллипс 	$F = \frac{1}{2} \pi ab;$ $J_x = ba^3 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right); J_y = \frac{\pi ab^3}{8};$ $W_{x_B} = \frac{ba^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)}{1 - \frac{4}{3\pi}}; W_y = \frac{\pi ab^2}{8}$

Приложение 3

Стандартные профили прокатной стали



Двутавры стальные горячекатаные (ГОСТ 8239)

Обозначения:

h – высота балки;

b – ширина полки;

d – толщина стенки;

t – средняя толщина полки;

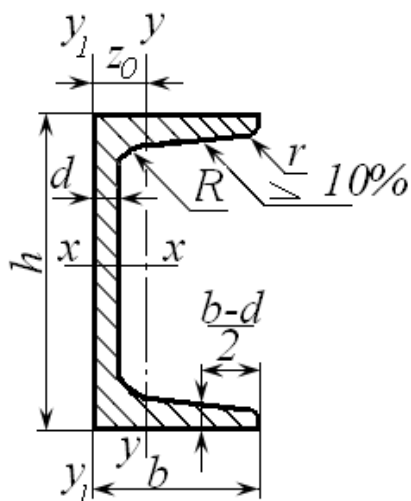
J – момент инерции;

W – момент сопротивления;

S – статический момент полусечения;

i – радиус инерции

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь, см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Масса 1 м, кг
	h	b	d	t									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,50
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55	13,70
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70	15,90
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88	18,40
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12	19,90
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07	21,00
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32	22,70
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27	24,00
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50	25,80
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37	27,30
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63	29,40
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54	31,50
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80	33,90
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69	36,50
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95	39,20
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79	42,20
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13 380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89	48,60
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19 062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03	57,00
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27 696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09	66,50
50	500	170	10,0	15,2	100,0	39 727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23	78,50
55	550	180	11,0	16,5	118,0	55 962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39	92,60
60	600	190	12,0	17,8	138,0	76 806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54	108,0



Швеллеры стальные горячекатаные с уклоном внутренних граней полков (ГОСТ 8240)

Обозначения:

h – высота балки;

b – ширина полки;

d – толщина стенки;

t – средняя толщина полки;

J – момент инерции;

W – момент сопротивления;

S – статический момент полусечения;

i – радиус инерции;

z_0 – расстояние от центра тяжести
до наружных граней полков

Номер швеллера	Размеры, мм						Площадь, см ²	Масса 1м, кг	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	z_0 , см
	H	b	d	t	R	r										
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,30	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,60	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30	491,1	70,2	5,60	40,80	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,00	13,30	545,0	77,8	5,66	45,10	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,10	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,40	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,0	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,0	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,20	19,80	1670,0	167,0	8,15	95,90	139,0	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,0	151,0	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,80	22,60	2330,0	212,0	8,99	121,0	187,0	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,0	208,0	31,6	2,60	2,42
24 a	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,90	25,80	3180,0	265,0	9,84	151,0	254,0	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	178,0	262,0	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,0	327,0	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,0	410,0	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90	10 820,0	601,0	14,20	350,0	513,0	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30	15 220,0	761,0	15,70	444,0	642,0	73,4	3,23	2,75

**Уголки стальные горячекатаные
равнополочные
(ГОСТ 8509)**

Обозначения:

b – ширина полки;

d – толщина стенки;

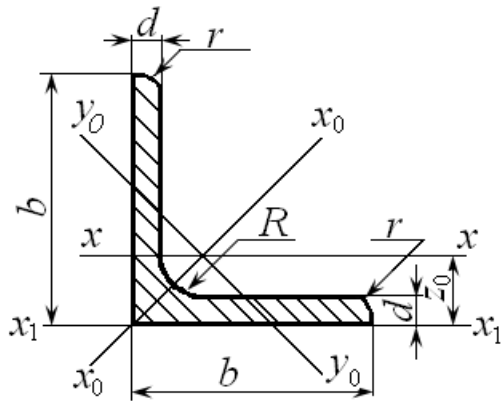
J – момент инерции;

J_{xy} – центробежный момент инерции;

W – момент сопротивления;

i – радиус инерции;

z_0 – расстояние от центра тяжести
до наружных граней полкок



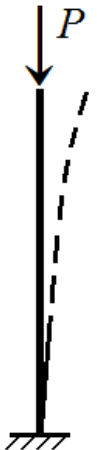
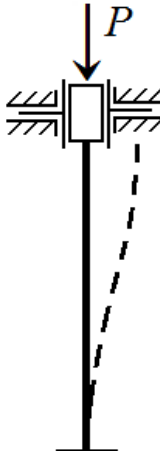
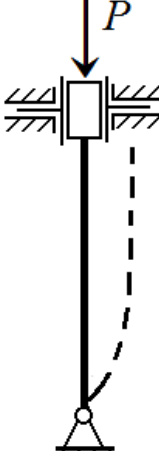
Номер профиля	Размеры, мм				Площадь, см ²	Справочные величины для осей								Масса 1 м, кг
	b	d	R	r		x – x		x ₀ – x ₀		y ₀ – y ₀		x ₁ – x ₁		
						J _x , см ⁴	i _x , см ⁴	J _{x₀} max, см ⁴	i _{x₀} max, см	J _{y₀} min, см ⁴	i _{y₀} min, см	J _{xy} , см ⁴	z ₀ , см	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4			1,46	0,50	0,53	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4			1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	4,0	4,3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4			2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	3,39	0,94	1,91
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	1,65
		4			2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04	2,16
4	40	3	5,0	1,7	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
		4			3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42
		5			3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	2,97
4,5	46	3	5,0	1,7	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
		4			3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,0	1,26	2,73
		5			4,20	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	3,37
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33	2,32
		4			3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38	3,05
		5			4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42	3,77
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52	3,44
		5			5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	4,25
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	3,90
		5			6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
		6			7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	5,72
7	70	4,5	8	2,7	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5			6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6			8,15	37,6	2,15	53,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7			9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8			10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7,5	75	5	9	3,0	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6			8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7			10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8			11,50	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02
		9			12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10
8	80	5,5	9	3,0	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6			9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36
		7			10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51
		8			12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65
9	90	6	10	3,3	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33
		7			12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64
		8			13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90
		9			15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20
10	100	6,5	12	4,0	12,8	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,9	214,0	2,68	10,10
		7			13,8	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80
		8			15,6	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20
		10			19,2	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83	15,10
		12			22,8	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90
		14			26,3	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60
		16			29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06	23,30
11	110	7	12	4,0	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90
		8			17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50
12,5	125	8 9	14	4,6	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		10			22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		12			24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		14			28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		16			33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16			37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
14	140	9	14	4,6	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10			27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12			32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5
16	160	10	16	5,3	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11			34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12			37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14			43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16			49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18			54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20			60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	16	5,3	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12			42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	18	6,0	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13			50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14			54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16			62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20			76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25			94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
22	220	30	21	7,0	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
		14 16			60,4 68,6	2814 3175	6,83 6,81	4470 5045	8,60 8,58	1159 1306	4,38 4,36	4941 5661	5,93 6,02	47,4 53,8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
25	250	16	24	8	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18			87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20			97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22			106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11 464	7,00	83,3
		25			119,7	7006	7,65	11 125	9,64	2887	4,91	13 064	7,11	94,0
		28			133,1	7717	7,61	12 244	9,59	3190	4,89	14 674	7,23	104,5
		30			142,0	8177	7,59	12 965	9,56	3389	4,89	15 753	7,31	111,4

Приложение 4

Коэффициент приведенной длины μ
(величина μ зависит от способа закрепления концов стержня)

 $\mu = 1$	 $\mu = 2$	 $\mu = 0,5$	 $\mu = 0,7$
 $\mu = 0,7$	 $\mu = 0,5$	 $\mu = 1$	 $\mu = 0,5$

П р и м е ч а н и е. Пунктиром показана ось стержня при потере устойчивости.

Приложение 5

Коэффициент снижения допускаемых напряжений φ
(зависит от марки материала и гибкости λ стержня)

Гибкость λ	φ				
	Сталь Ст1, 2, 3, 4	Ст5	Стали повышенного качества $\sigma_{\text{пл}} > 320 \text{ МПа}$	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,37	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

Приложение 6

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Пензенский государственный университет
Политехнический институт
Кафедра «Теоретическая и прикладная механика и графика»

КУРСОВАЯ РАБОТА

По дисциплине «Техническая механика»

Тема «Расчет на прочность элементов машиностроительных
конструкций»

Направление – 15.03.01 – Машиностроение

Профиль подготовки – Оборудование и технология сварочного
производства

Выполнил

студент гр. 20-МО1
Иванов И.И.

Руководитель

д.т.н., профессор
Литвинов А.Н.

Работа защищена

с оценкой _____

дата защиты _____

Пенза 2023

Приложение 7

Задание на курсовую работу

«УТВЕРЖДАЮ»

Зав. кафедрой ТПМГ,
д.т.н., профессор _____ А. Ю. Муйземнек

« ____ » _____ 20 ____

ЗАДАНИЕ

На курсовую работу по дисциплине «Техническая механика»

Студенту _____ гр. _____

Тема: «Расчет на прочность элементов машиностроительных конструкций»

Курсовая работа является составной частью учебной дисциплины, оформляется в виде расчетно-пояснительной записки и состоит из решения ряда задач по расчету на прочность, жесткость и устойчивость элементов машиностроительных конструкций.

Вариант задания выбирается по номеру зачетной книжки студента. Исходные данные выбираются по варианту задания в соответствии с указаниями, приведенными в учебном пособии:

Литвинов А.Н. Техническая механика. Пенза : Изд-во ПГУ, 2023. 218 с.
(Пособие размещено на сайте http://dep_tpmg.pnzgu.ru/files/dep_tpmg.pnzgu.ru)

Вариант задания: _____

График выполнения курсовой работы

Номер раздела курсовой работы	Наименование раздела	Срок выполнения
1	Расчет статически определимого стержня	
2	Расчет статически неопределимого стержня	
3	Расчет геометрических характеристик	
4		
5	Расчет на прочность трансмиссионного вала	
6		
7	Оформление курсовой работы	
8	Защита курсовой работы	

Дата выдачи задания

« ____ » _____ 20 ____ г.

Руководитель курсовой работы

д.т.н., профессор _____ Литвинов А. Н.

Приложение 8

Структура пояснительной записки

Пояснительная записка курсовой работы включает в себя следующие элементы:

- титульный лист;
- реферат;
- содержание;
- введение;
- основные разделы, которые содержат расчетные схемы конструктивных элементов, расчеты и графический материал, иллюстрирующий расчеты на прочность, жесткость и устойчивость;
- заключение, включающее в себя общие выводы по выполнению курсовой работы;
- список использованной литературы;
- приложения, включающие в себя чертежи, расчетные схемы, результаты вспомогательных численных расчетов и испытаний элементов конструкций (при необходимости).

Курсовая работа оформляется в соответствии с рекомендациями [14].

Учебное издание

Литвинов Александр Николаевич

Техническая механика

Редактор *В. В. Устинская*
Технический редактор *М. Б. Жучкова*
Компьютерная верстка *М. Б. Жучковой*
Дизайн обложки *И. В. Шваревой*

Подписано в печать 24.07.2023.
Формат 60×84¹/₁₆. Усл. печ. л. 12,67.
Тираж 78. Заказ № 327.

Издательство ПГУ.
440026, г. Пенза, ул. Красная, 40.
Тел.: (8412) 66-60-49, 66-67-77; e-mail: iic@pnzgu.ru